ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Дифференцируемость функций

В этом и последующих параграфах для простоты записи будем все выкладки подробно расписывать для функций двух или трех аргументов. Тем не менее, все, то же самое, будет справедливо и для функций произвольного числа аргументов.

Рассмотрим функцию $f(x,y,z)$, определенную в области $D \subset R^3$. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — внутренняя точка области D. В данной точке придадим аргументу x некоторое приращение Δx (остальные аргументы y и z считаем фиксированными). Тогда величина

$$\Delta_x f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

называется частным приращением функции $f(x,y,z)$ в точке M_0 по переменной x.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $f(x,y,z)$ в точке M_0 по переменной x (пишут $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}$ или $f'_x(M_0)$).

Аналогично можно ввести частные приращения и частные производные для функции по другим аргументам:

$$\Delta_y f(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} = f'_z(M_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z f(M_0)}{\Delta z}.$$

Поскольку при вычислении частной производной по какой-то переменной все остальные переменные мы рассматриваем, как константы, то при работе с частными производными можно использовать всю теорию дифференциального исчисления функций одной переменной.

Пример. Пусть $f(x,y,z) = xe^{y+z^2}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y+z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y+z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xe^{y+z^2} 2z.$$

Зададим теперь в точке M_0 приращения сразу одновременно по всем трем аргументам: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Тогда величина

$$\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

называется полным приращением функции $f(x,y,z)$ в точке M_0.

Определение. *Функция $f(x,y,z)$ называется дифференцируемой в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:*

$$\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где A, B, C — некоторые постоянные (зависящие от выбора точки M_0),

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости). *Для того, чтобы функция $f(x, y, z)$ была дифференцируемой в точке M_0 необходимо, чтобы в этой точке у нее существовали частные производные по всем аргументам.*

Доказательство. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Положим $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$. Тогда из определения дифференцируемости следует, что

$$\Delta f(M_0) = \Delta_x f(M_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Перейдем в данном выражении к пределу при $\Delta x \to 0$. Правая часть равенства имеет предел, значит, и левая тоже должна иметь предел. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A.$$

Таким образом, функция $f(x, y, z)$ дифференцируемой в точке M_0 по переменной x. Аналогично показывается, что она будет дифференцируема и по другим переменным y и z, причем

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}, \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}.$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0, то

$$\Delta f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} \Delta z + o(\rho).$$

Замечание. Существование частных производных является только необходимым условием дифференцируемости, но не достаточным.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). *Для того, чтобы функция $f(x, y, z)$ была дифференцируемой в точке M_0 достаточно, чтобы в окрестности этой точки у нее существовали непрерывные частные производные по всем аргументам.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}
\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\
= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) + \\
+ f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) + \\
+ f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\
= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x + \\
+ \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y + \\
+ \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} \Delta z = \\
= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} + \alpha \right) \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} + \beta \right) \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} + \gamma \right) \Delta z,
\end{gathered}$$

где
$$\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)}{\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0},$$
$$\beta = \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0},$$
$$\gamma = \frac{f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} - \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}.$$
Тогда
$$\Delta f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}\Delta z + \varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$
Здесь
$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z.$$
Учитывая непрерывность частных производных в точке M_0, находим, что
$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = o(\rho).$$
Получили, что функция $f(x, y, z)$ является дифференцируемой в точке M_0. Теорема доказана.

Замечание. Непрерывность частных производных является только достаточным условием дифференцируемости, но не необходимым.

Определение. *Линейная (относительно приращений аргументов) часть полного приращения функции называется первым дифференциалом функции в заданной точке M_0 (пишут $df(M_0)$).*

Обозначим $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$. Тогда
$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}dy + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0}dz,$$
т.е.
$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + o(\rho).$$
Легко доказать следующие арифметические свойства первого дифференциала:
1) $d(f \pm g) = df \pm dg$,
2) $d(fg) = gdf + fd$,
3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$ (если $g(M_0) \neq 0$).

Замечание. Аналогично, пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset R^n$, и $M_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — внутренняя точка области D. Тогда
$$\Delta_{x_i} f(M_0) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n;$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(M_0)}{\Delta x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\Delta f(M_0) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$
Дифференцируемость означает, что
$$\Delta f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0} \Delta x_i + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$. При этом

$$df(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{M_0} dx_i.$$

Здесь $dx_i = \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для n-мерного случая верны все те же теоремы, что были доказаны ранее.

Замечание. Сточностью до слагаемых большего порядка имеем $\Delta f(M_0) \approx df(M_0)$. Этот факт можно использовать для приближенных вычислений.

Пример. Вычислить приближенно $I = \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Пусть $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Выберем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,03$. Получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I = f(1,02;\, 1,97) = f(1,2) + \Delta f(1,2) \approx f(1,2) + df(1,2) = \\ = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)} \Delta y = \\ = 3 + 0,5 \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 2,95. \end{aligned}$$

Чтобы оценить точность полученного значения, а также чтобы получить более точное значение, следует воспользоваться формулой Тейлора (см. далее).

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Производные сложной функций

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам.

Предположим, что

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \qquad\qquad (u, v) \in T \subset R^2, \\ z = \chi(u, v), \end{cases}$$

где T — двумерная область, отображаемая данными уравнениями в трехмерную область D.

Будем считать, что функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T.

Рассмотрим сложную функцию (суперпозицию):

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Зададим приращение аргумента u: Δu (аргумент v зафиксируем). Тогда

$$\begin{cases} \Delta_u x = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v), \\ \Delta_u y = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v), \\ \Delta_u z = \chi(u + \Delta u, v) - \chi(u, v), \end{cases}$$

В силу дифференцируемости функции $f(x, y, z)$, имеем

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$$

при любых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ $(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2})$. Положим

$$\Delta x = \Delta_u x, \quad \Delta y = \Delta_u y, \quad \Delta z = \Delta_u z.$$

Тогда полное приращение функции $f(x, y, z)$ совпадет с частным приращением по переменной u функции $F(u, v)$:

$$\Delta f = \Delta_u F = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_u y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta_u z + o(\rho).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_u F}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta_u z}{\Delta u} + \frac{o(\rho)}{\rho}\frac{\rho}{\Delta u}.$$

Переходя к пределу при $\Delta u \to 0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Замечание. В общем случае, пусть имеется функция $f(x_1, \dots, x_n)$, где

$$x_i = x_i(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда при условии существования и непрерывности соответствующих частных производных получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Пример. Пусть $f(x, y) = \sin(x + y^2)$, где

$$x = uv, \qquad y = u^2 + v^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \cos(x + y^2)v + \cos(x + y^2)2y2u,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \cos(x + y^2)u + \cos(x + y^2)2y2v.$$

Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$, где

$$x = \sin t, \qquad y = e^t.$$

Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\cos t + 2ye^t = 2\sin t\cos t + 2e^{2t}.$$

Проверим: Обозначим $F(t) = f(x(t), y(t)) = \sin^2 t + e^{2t}$. Дифференцируя это выражение по t, убеждаемся, что найденная выше формула верна.

Теорема (Лагранж). *Пусть функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда при любых приращениях аргументов $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (не выводящих аргументы за пределы указанной окрестности) можно указать такое $\theta \in (0, 1)$, что*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)\Delta z$$

(формула конечных приращений).

Доказательство. Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z).$$

Имеем

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z.$$

По одномерной теореме Лагранжа найдется такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\Delta f = F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0) = F'(\theta).$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичный результат можно доказать для пространства R^n. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в окрестности точки $M_0 = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$. Тогда при любых приращениях аргументов $\Delta x_1,\dots,\Delta x_n$ (не выводящих аргументы за пределы указанной окрестности) можно указать такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\tilde{M})\Delta x_i.$$

Здесь $M = (x_1^{(0)} + \Delta x_1,\dots,x_n^{(0)} + \Delta x_n)$, $\tilde{M} = (x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1,\dots,x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n)$.

Следствие. *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ определена и непрерывна в связной области $D \subset R^n$, причем $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_n) \equiv 0$, $i = 1,\dots,n$, в области D. Тогда $f(x_1,\dots,x_n) \equiv \mathrm{const}$ в области D.*

Снова пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам. Тогда она дифференцируема, и

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \tag{1}$$

Предположим теперь, что

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ z = \chi(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in T \subset R^2,$$

причем функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T. Тогда

$$df = f'_u du + f'_v dv = (f'_x x'_u + f'_y y'_u + f'_z z'_u)du + (f'_x x'_v + f'_y y'_v + f'_z z'_v)dv =$$

$$= f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) + f'_z(z'_u du + z'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), замечаем, что форма первого дифференциала не зависит от того, рассматриваем ли мы аргументы x, y, z как независимые переменные (в этом случае dx, dy, dz — независимые приращения аргументов) или как функции от каких-то других независимых переменных (в этом случае dx, dy, dz — дифференциалы соответствующих функций). Такое свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала. Нетрудно проверить, что оно справедливо для любого числа аргументов.

§ Производные по направлению

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $D \subset R^3$ и имеет там непрерывные частные производные по всем аргументам. Возьмем $M_0 = (x_0,y_0,z_0) \in D$. Пусть $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$ — вектор единичной длины, выходящий из точки M_0. Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы, задающие вектор $\vec{l}$ (α, β, γ — углы между вектором $\vec{l}$ и тремя осями координат, соответственно).

Проведем луч, выходящий из точки M_0 в направлении вектора $\vec{l}$. Возьмем произвольную точку $M = (x, y, z)$ на этом луче (см. рисунок 1). Тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma, \end{cases}$$

где $t \geq 0$. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{h}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{h}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{h}.$$

Здесь h — расстояние между точками M_0 и M. Получаем

$$h = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t.$$

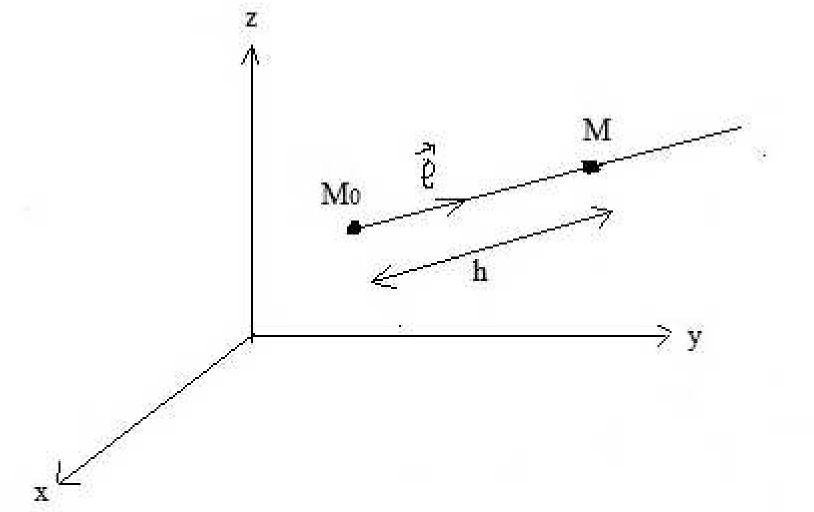

Рис. 1.

Определение. *Производной функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ называется величина*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{h\to+0} \frac{f(M) - f(M_0)}{h}.$$

Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{t\to+0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma.$$

Определение. *Вектор*

$$\vec{\nabla} f = \mathrm{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z)^T$$

называется градиентом функции $f(x, y, z)$.

Получаем:
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = (\vec{\nabla} f(M_0), \vec{l}) = |\vec{\nabla} f(M_0)| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\omega,$$
где ω — угол между векторами $\vec{\nabla} f(M_0)$ и $\vec{l}$.

Замечание. Вдоль направления $\vec{l}$ функция нескольких переменных $f(x,y,z)$ превращается в функцию одной переменной $F(t)$. Тогда, применяя одномерную теорию, получаем, что $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ — это скорость изменения функции в заданной точке в заданном направлении. Так, если $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} > 0$, то функция $f(x,y,z)$ растет в данном направлении, если $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} < 0$, то функция $f(x,y,z)$ убывает в данном направлении. Отметим также, что если в качестве вектора $\vec{l}$ взять орты осей координат (векторы $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$), то производная $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ совпадет с частными производными $f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)$. Таким образом, частные производные — это производные по направлению осей координат.

Поставим задачу: найти такое направление $\vec{l}$, при котором значение $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ наибольшее (направление наискорейшего возрастания функции). Поскольку $|\vec{l}| = 1$, а величина $\vec{\nabla} f(M_0)$ не зависит от выбора $\vec{l}$, то значение $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$ будет наибольшим, если $\omega = 0$, т.е. если направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента $\vec{\nabla} f(M_0)$. Таким образом, градиент и указывает направление наискорейшего возрастания функции в заданной точке.

Аналогично можно ввести вестор $(-\vec{\nabla} f(M_0))$ антиградиент. Он указывает направление наискорейшего убывания функции в заданной точке.

Замечание. Аналогично все можно расписать для пространства R^n. Пусть задана функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, имеющая непрерывные частные производные. Вектор $\vec{\nabla} f = (f'_{x_1},\ldots,f'_{x_n})^T$ называется градиентом. Пусть $\vec{l} = (\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)^T$ — единичный вектор, выходящий из точки M_0 и задаваемый направляющими косинусами. Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = (\vec{\nabla} f(M_0), \vec{l}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(M_0)\cos\alpha_i.$$

Пример. Пусть $f(x,y) = x^2 + 2y^3$, $M_0 = (3,2)$, $\vec{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$. Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0} = f'_x(M_0)\frac{\sqrt{3}}{2} + f'_y(M_0)\frac{1}{2} = (2x)\big|_{M_0}\frac{\sqrt{3}}{2} + (6y^2)\big|_{M_0}\frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + 12.$$

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Производные и дифференциалы старшего порядка

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $D \subset R^2$ и имеет там частные производные по своим аргументам:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Предположим, что эти функции также, в свою очередь, имеют в области D частные производные. Тогда получим частные производные второго порядка

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Последние две производные называются смешанными.

Аналогино, если продифференцировать полученные частные производные второго порядка еще раз, то получим частные производные третьего порядка, и т.д.

Нетрудно заметить, что если имеется функция от n переменных, то у нее может быть n^k частных производных k-ого порядка.

Пример. Пусть $f(x,y) = 4x^2y^3$. Тогда

$$f'_x = 8xy^3, \quad f'_y = 12x^2y^2,$$

$$f''_{x^2} = 8y^3, \quad f''_{xy} = 24xy^2, \quad f''_{yx} = 24xy^2, \quad f''_{y^2} = 24x^2y.$$

В данном примере оказалось, что $f''_{xy} = f''_{yx}$. Это случайность или нет?

Теорема (о равенстве смешанных производных). *Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ и имеет там непрерывные частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$. Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.*

Доказательство. Зададим произвольные (малые) значения $h, k \neq 0$ и построим величину

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}.$$

Положим

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}.$$

Тогда

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0+k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2).$$

Здесь мы дважды применили одномерную теорему Лагранжа (сначала по переменной x, затем по переменной y); c_1 — некоторая точка, лежащая между x_0 и $x_0 + h$; c_2 — некоторая точка, лежащая между y_0 и $y_0 + k$.

Аналогично, пусть

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h}.$$

Тогда

$$W = \frac{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'_y(x_0+h, c_3) - f'_y(x_0, c_3)}{h} = f''_{yx}(c_4, c_3).$$

Здесь мы снова дважды применили одномерную теорему Лагранжа (теперь сначала по переменной y, затем по переменной x); c_4 — некоторая точка, лежащая между x_0 и x_0+h; c_3 — некоторая точка, лежащая между y_0 и y_0+k.

Получили

$$W = f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{yx}(c_4, c_3).$$

Переходя к пределу при $h, k \to 0$ и учитывая непрерывность вторых смешанных производных в точке M_0, получим требуемое равенство $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать, что если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные до k-ого порядка в некоторой области, то тогда в этой области при вычислении указанных производных важно лишь учитывать количество дифференцирований по каждой из переменной. При этом порядок, в котором ведется дифференцирование, не важен.

Пример. Пусть $f(x, y, z) = xy^2e^z$. Получаем

$$f'_x = y^2e^z, \quad f''_{xy} = 2ye^z, \quad f'''_{xy^2} = 2e^z, \quad f^{(4)}_{xy^2z} = 2e^z.$$

Поскольку никаких проблем с непрерывностью здесь не возникает, то тогда можно утверждать, что

$$f^{(4)}_{xy^2z} = f^{(4)}_{y^2xz} = f^{(4)}_{xyzy} = f^{(4)}_{zxy^2} = f^{(4)}_{zyxy} = \ldots = 2e^z.$$

Пусть функция $f(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные первого порядка. Тогда она дифференцируема в данной области, и

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

Предположим теперь, что $f(x, y)$ имеет в области D также непрерывные частные производные второго порядка. Зафиксируем приращения аргументов dx, dy. В этом случае первый дифференциал будет являться функцией только переменных x, y. Тогда выражение

$$d^2f = d(df)$$

назовем вторым дифференциалом функции $f(x, y)$. Имеем

$$d^2f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$

$$= (f''_{x^2} dx + f''_{yx} dy)dx + (f''_{xy} dx + f''_{y^2} dy)dy = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

(здесь мы воспользовались теоремой о равенстве смешанных производных).

Аналогично, если функция $f(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, то зафиксировав dx, dy, можно ввести понятие третьего дифференциала:

$$d^3f = d(d^2f) = (f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2)'_x dx + (f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2)'_y dy =$$

$$= f'''_{x^3} dx^3 + 3f'''_{x^2y} dx^2dy + 3f'''_{xy^2} dxdy^2 + f'''_{y^3} dy^3.$$

По индукции нетрудно доказать, что при наличии у функции $f(x, y)$ в области D непрерывных частных производных до k-ого порядка включительно верно:

$$d^kf = d(d^{k-1}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} dx^i dy^{k-i}.$$

Для случая функции n переменных также можно получить формулу:

$$d^k f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f$$

(здесь снова используется предположение о непрерывности частных производных до k-ого порядка включительно).

Замечание. Дифференциал k-ого порядка функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в заданной точке можно рассматривать как однородную форму k-ого порядка относительно приращений аргументов $dx_1, \ldots, dx_n$. Также стоит отметить, что дифференциалы старшего порядка (выше первого) свойством инвариантности формы, вообще говоря, не обладают.

Снова рассмотрим функцию $f(x, y)$. Будем считать, что у нее существуют непрерывные частные производные в области D до порядка k включительно. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ — внутренние точки области D, причем отрезок, соединяющий эти две точки, не выходит за границы области D. Обозначим

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Тогда уравнение отрезка, соединяющего точки M_0 и M, можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Построим функцию

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Согласно одномерной формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}(1-0) + \frac{F''(0)}{2!}(1-0)^2 + \ldots + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}(1-0)^{k-1} +$$

$$+ \frac{F^{(k)}(\theta)}{k!}(1-0)^k,$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Имеем

$$F(0) = f(M_0),$$

$$F'(0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y = df(M_0).$$

Аналогично по индукции нетрудно доказать, что

$$F^{(i)}(0) = d^i f(M_0), \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

$$F^{(k)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^k f(\tilde{M}),$$

где $\tilde{M} = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ — точка, лежащая на отрезке, соединяющем M_0 и M.

Тогда, учитывая что

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0),$$

получаем формулу Тейлора для функции двух переменных:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{k-1}f(M_0)}{(k-1)!} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(\tilde{M}).$$

Замечание. Формулу Тейлора можно составить и для функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{k-1}f(M_0)}{(k-1)!} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(\tilde{M}).$$

Здесь $M_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $M = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n$, $\tilde{M} = (x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n)$, $\theta \in (0,1)$. При $k = 1$ получим формулу конечных приращений Лагранжа (см. ранее).

Пример. Пусть $f(x,y) = \sin(x-y)$, $M_0 = (0,0)$. Тогда

$$\Delta x = x - 0 = x, \quad \Delta y = y - 0 = y.$$

Вычислим

$$f'_x = \cos(x-y), \quad f'_y = -\cos(x-y),$$

$$f''_{x^2} = -\sin(x-y), \quad f''_{xy} = \sin(x-y), \quad f''_{y^2} = -\sin(x-y),$$

$$f'''_{x^3} = -\cos(x-y), \quad f'''_{x^2y} = \cos(x-y), \quad f'''_{xy^2} = -\cos(x-y), \quad f'''_{y^3} = \cos(x-y),$$

и т.д. Тогда

$$f(0,0) = 0,$$

$$df(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y = x - y,$$

$$d^2f(0,0) = f''_{x^2}(0,0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(0,0)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(0,0)(\Delta y)^2 = 0,$$

$$d^3f(0,0) = f'''_{x^3}(0,0)(\Delta x)^3 + 3f'''_{x^2y}(0,0)(\Delta x)^2\Delta y + f'''_{xy^2}(0,0)\Delta x(\Delta y)^2 + f'''_{y^3}(0,0)(\Delta y)^3 =$$

$$= -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = -(x-y)^3,$$

и т.д. Получаем, что

$$\sin(x-y) = (x-y) - \frac{(x-y)^3}{3!} + \ldots.$$

Данную формулу можно было бы получить сразу, вспомнив одномерную формулу Тейлора дл синуса:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

и полагая $z = x - y$.

Пример. Пусть $f(x,y) = e^{1+x+y}$, $M_0 = (0,0)$. Если вспомнить одномерную формулу Тейлора для экспоненты

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

и, полагая $z = 1 + x + y$, записать

$$e^{1+x+y} = 1 + (1 + x + y) + \frac{(1 + x + y)^2}{2!} + \dots,$$

то это будет не верно, поскольку указанная формула — это разложение экспоненты в точке $z_0 = 0$ (а при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ получается $z_0 = 1 + x_0 + y_0 = 1 \neq 0$). Правильно записать так:

$$e^{1+x+y} = e \cdot e^{x+y} = e \left(1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \dots \right).$$

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Экстремумы функции некольких переменных

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена при $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D \subset R^n$.

Определение. *1) Точка $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in D$ называется точкой локального минимума функции $f(\mathbf{x})$, если:*

$$\exists \delta > 0: \ \forall x \in (U_\delta(\mathbf{a}) \cap D) \ \Rightarrow \ f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}).$$

2) Точка $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in D$ называется точкой локального максимума функции $f(\mathbf{x})$, если:

$$\exists \delta > 0: \ \forall x \in (U_\delta(\mathbf{a}) \cap D) \ \Rightarrow \ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}).$$

Здесь

$$U_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in R^n: \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta\}$$

— δ-окрестность точки $\mathbf{a}$; $\rho(\cdot)$ — метрика в пространстве R^n.

Точки локального минимума и максимума называются точками локального экстремума.

Теорема (необходимые условия локального экстремума). *Пусть $\mathbf{a}$ — внутренняя точка области D, и функция $f(\mathbf{x})$ имеет частные производные по своим аргументам в этой точке. Тогда для того чтобы точка $\mathbf{a}$ являлась точкой локального экстремума функции $f(\mathbf{x})$ необходимо, чтобы выполнялись условия:*

$$f'_{x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x_1) = f(x_1, a_1, \dots, a_n).$$

Тогда точка $x_1 = a_1$ является точкой локального экстремума функции $F(x_1)$. По теореме Ферма имеем:

$$F'(a_1) = f'_{x_1}(\mathbf{a}) = 0.$$

Аналогично показывается равенство нулю в точке $\mathbf{a}$ остальных частных производных функции $f(\mathbf{x})$. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что необходимое условие локального экстремума: $f'_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, можно переписать в виде: $df(\mathbf{a}) = 0$, или $\vec{\nabla} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Замечание. Выписанные условия экстремума являются только необходимыми, но не достаточными. Например, пусть $f(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$, но тем не менее точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума функции $f(x, y)$. В самом деле, $f(\delta, 0) > 0$, $f(0, \delta) < 0$ для любого сколь угодно малого $\delta > 0$, т.е. в любой окрестности точки $(0, 0)$ имеются как точки, в которых значение функции больше, чем $f(0, 0) = 0$, так и точки, в которых меньше.

Далее точку $\mathbf{a}$, для которой $df(\mathbf{a}) = 0$, будем называть стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$, или точкой, "подозрительной" на экстремум.

Замечание. Если точка $\mathbf{a}$ не является внутренней точкой области D и/или в этой точке не существуют частные производные функции $f(\mathbf{x})$, то пользоваться сформулированной выше теоремой, вообще говоря, нельзя.

Далее пусть в точке $\mathbf{a}$ выполнены необходимые условия локального экстремума. Для установления достаточных условий дополнительно предположим, что функция

$f(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $\mathbf{a}$. Тогда по формуле Тейлора для любой точки $\mathbf{x}$ из этой окрестности имеем:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) + R_2,$$

где

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\tilde{\mathbf{x}})dx_i dx_j,$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ — некоторая точка, лежащая на отрезке, соединяющем точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$. Выражение R_2 представляет собой квадратичную форму относительно $dx_1, \ldots, dx_n$:

$$R_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{dx})^T \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{dx}.$$

Здесь $\mathbf{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)^T$; $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{x}}) = \{f''_{x_i x_j}(\tilde{\mathbf{x}})\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица Гессе в точке $\tilde{\mathbf{x}}$.

Учитывая стационарность точки $\mathbf{a}$, получаем, что

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = R_2.$$

Таким образом, для того, чтобы точка $\mathbf{a}$ была точкой локального минимума (максимума), достаточно потребовать, чтобы выражение R_2 было положительным (отрицательным) при всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{a}$.

Для продолжения анализа рассмотрим некоторые результаты из теории квадратичных форм.

Квадратичной формой называется функция вида

$$\varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{A}\mathbf{z} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j.$$

Здесь $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$; $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — симметричная матрица квадратичной формы.

Определение. *Квадратичная форма (матрица квадратичной формы) называется:*

1) положительно определенной, если $\varphi(\mathbf{z}) > 0$, $\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$*;*

2) отрицательно определенной, если $\varphi(\mathbf{z}) < 0$, $\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$*;*

3) знакопостоянной положительной, если $\varphi(\mathbf{z}) \geq 0$, $\forall \mathbf{z} \in R^n$*;*

4) знакопостоянной отрицательной, если $\varphi(\mathbf{z}) \leq 0$, $\forall \mathbf{z} \in R^n$*;*

5) знакопеременной, если $\exists \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in R^n$: $\varphi(\mathbf{z}_1) > 0$, $\varphi(\mathbf{z}_2) < 0$.

Пример. Пусть $n = 2$. Тогда

1) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ — положительно определенная квадратичная форма;

2) $\varphi(x, y) = -x^2 - y^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма;

3) $\varphi(x, y) = (x - y)^2$ — знакопостоянная положительная квадратичная форма;

4) $\varphi(x, y) = -(x - y)^2$ — знакопостоянная отрицательная квадратичная форма;

5) $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ — знакопеременная квадратичная форма.

Теорема (критерий Сильвестра). *1) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры ее матрицы были положительными.*

2) Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы левые верхние угловые миноры ее матрицы чередовали знак, начиная с "−".

Пример. Пусть

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 4z_2 z_3.$$

Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее левые верхние угловые миноры:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = 23/4 > 0, \quad \Delta_3 = 7 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, данная квадратичная форма — положительно определенная.

Пример. Пусть

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_1 z_2.$$

Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее левые верхние угловые миноры:

$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta_2 = 3/4 > 0, \quad \Delta_3 = -3/4 < 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, данная квадратичная форма — отрицательно определенная.

Вернемся теперь к рассмотрению экстремумов функции.

Теорема (достаточные условия локального экстремума). *Пусть* $\mathbf{a}$ *— внутренняя точка области* D*, функция* $f(\mathbf{x})$ *имеет непрерывные частные производные по своим аргументам в этой точке до второго порядка включительно, и* $df(\mathbf{a}) = 0$*. Тогда:*

1) если матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ *положительно определена, то* $\mathbf{a}$ *— точка локального минимума;*

2) если матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ *отрицательно определена, то* $\mathbf{a}$ *— точка локального максимума;*

3) если матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ *— знакопеременная, то* $\mathbf{a}$ *не является точкой локального экстремума;*

4) если матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ *— знакопостоянная, но не знакоопределенная, то точка* $\mathbf{a}$ *может как являться точкой локального экстремума, так и не являться.*

Для доказательства данной теоремы достаточно заметить, что, в силу непрерывности, если матрица Гессе положительно определена (отрицательно определена, знакопеременна) в точке $\mathbf{a}$, то тогда она будет таковой и во всех точках $\tilde{\mathbf{x}}$ из некоторой малой окрестности точки $\mathbf{a}$. Таким образом, в пунктах 1)–3) вопрос о достаточных условиях локального экстремума решается на основе проверки знака второго дифференциала $d^2 f(\mathbf{a})$.

Для иллюстрации пункта 4) теоремы рассмотрим функции $f_1(x, y) = x^4 + y^4$ и $f_2(x, y) = x^3 + y^3$. В обоих случаях точка $(0, 0)$ — это стационарная точка, и матрицы Гессе в этой точке — нулевые (знакопостоянные). Однако, для функции $f_1(x, y)$ точка $(0, 0)$ является точкой экстремума (минимума), а для функции $f_2(x, y)$ — нет.

Если матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ — знакопостоянная, но не знакоопределенная, то для построения достаточных условий локального экстремума надо задействовать производные и дифференциалы порядка выше второго (см. формулу Тейлора):

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{a}) + \frac{1}{3!}d^3 f(\mathbf{a}) + \frac{1}{4!}d^4 f(\mathbf{a}) + \ldots .$$

Отметим, что хороших (простых) критериев проверки знакоопределенности однородных форм порядка выше 2, вообще говоря, нет.

Определение. *1) Точка $\mathbf{a} \in D$ называется точкой глобального минимума функции $f(\mathbf{x})$ в области D, если: $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, $\forall x \in D$.*

2) Точка $\mathbf{a} \in D$ называется точкой глобального максимума функции $f(\mathbf{x})$ в области D, если: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, $\forall x \in D$.

Точки глобального минимума и максимума называются точками глобального экстремума. Глобальные экстремумы (если они существуют) могут достигаться либо в точках локального экстремума внутри области D, либо на границе области D. Заметим, что для проверки граничных точек области D на экстремальность сформулированные выше теоремы применять нельзя. В этом случае можно воспользоваться методами поиска условного экстремума (см. далее).

Пример. Найдем экстремумы функции

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 2y^2 - y + 1$$

в пространстве R^2.

Выписываем необходимые условия экстремума:

$$f'_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f'_y = -3x + 4y - 1 = 0.$$

Данная система уравнений имеет два решения: $(1, 1)$ и $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$.

Проверяем достаточные условия экстремума:

$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{y^2} = 4.$$

Значит,

$$\mathbf{S}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{S}(1, 1)$ положительно определена, следовательно, точка $(1, 1)$ — точка локального минимума; матрица $\mathbf{S}(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ — знакопеременная, следовательно, точка $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ не является точкой локального экстремума.

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{R^2} f(x, y) = +\infty, \quad \inf_{R^2} f(x, y) = -\infty,$$

т.е. глобальных экстремумов в области R^2 у функции нет.

Пример. Рассмотрим задачу: найти экстремумы функции

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1$$

при $(x, y) \in D$, где

$$D: \ x^2 + y^2 \leq 9.$$

Ищем сначала локальные экстремумы внутри области D:

$$f'_x = 2(x-1) = 0, \quad f'_y = 2(y-2) = 0.$$

Получили одну стационарную точку: $(1,2) \in D$.

Имеем

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = 2, \quad f''_{xy} = 0.$$

Строим матрицу Гессе:

$$\mathbf{S}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Она положительно определена при любых x и y, значит, $(1,2)$ — точка локального (нетрудно заметить, что и глобального) минимума (см. рисунок 1).

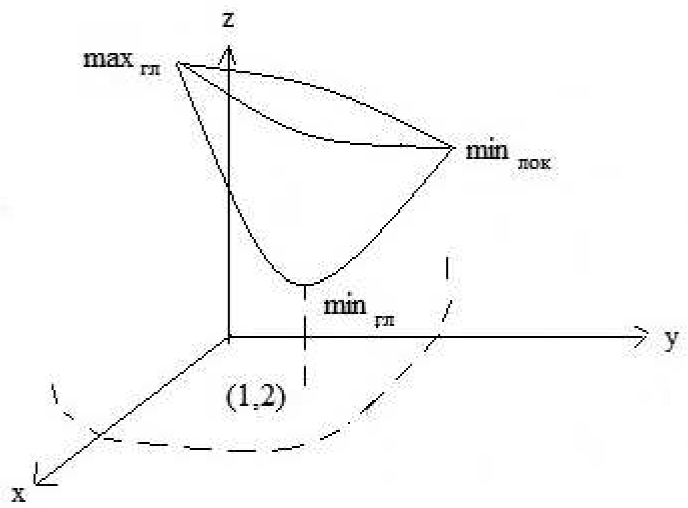

Рис. 1.

Глобальный максимум функции в области D достигается на границе этой области. Из уравнения границы:

$$x^2 + y^2 = 9$$

можно исключить одну из переменных, например,

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}, \quad x \in [-3,3],$$

и свести задачу к поиску безусловного экстремума:

$$F(x) = f(x, \pm\sqrt{9-x^2}) = (x-1)^2 + (\pm\sqrt{9-x^2} - 2)^2 + 1 \to \text{extr}$$

при $x \in [-3,3]$.

Можно уравнение границы записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда снова получим одномерную задачу на поиск безусловного экстремума:

$$\tilde{F}(t) = f(3\cos t, 3\sin t) = (3\cos t - 1)^2 + (3\sin t - 2)^2 + 1 \to \text{extr}$$

при $t \in [0, 2\pi]$.

Решив полученную задачу в одной или другой форме, найдем глобальный максимум функции, достигаемый ею на границе области D. Также на границе области D имеется один локальный минимум.

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Численные методы поиска экстремума

В предыдущем параграфе были сформулированы необходимые и достаточные условия безусловного локального экстремума. Однако, их далеко не всегда удается использовать на практике. Чтобы проверить необходимые условия экстремума, надо решить систему алгебраических уравнений, что редко удается сделать аналитически. Целевая функция, экстремум которой ищется, может оказаться сложной, не дифференцируемой, или вообще, не заданной в виде конкретной формулы. В таких случаях целесообразно задействовать численные методы поиска экстремума.

1. Оптимизация функций одной переменной. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Вычислим $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Тогда можно предположить, что

$$\max_{[a,b]} f(x) \approx \max\{y_0, \ldots, y_n\}, \quad \min_{[a,b]} f(x) \approx \min\{y_0, \ldots, y_n\}.$$

При этом возникают проблемы: Как лучше выбрать значение n? Как лучше расположить точки дробления $x_1, \ldots, x_n$? Как оценить погрешность найденных экстремальных значений? Как правило, для решения этих проблем приходится задействовать "физику" процесса.

2. Оптимизация функций нескольких переменных. Пусть теперь требуется найти глобальные экстремумы у функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой области $D \in R^n$. Простое построение сетки узлов на области D (по аналогии со случаем функций одной переменной) приведет к большим вычислительным затратам. Поэтому обычно используют один из следующих подходов (и их различные модификации).

а) Метод покоординатного спуска.

Выберем произвольную начальную точку $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T \in D$. Решим одномерную оптимизационную задачу:

$$f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \to \max_{x_1} \left(\min_{x_1}\right).$$

Пусть $x_1^{(1)}$ — решение этой задачи. Теперь оптимизируем значение второй переменной:

$$f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \to \max_{x_2} \left(\min_{x_2}\right).$$

Находим решение $x_2^{(1)}$ этой задачи, и т.д. В результате за n шагов придем в некоторую точку $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})^T \in D$. Далее все повторяем заново. Получаем последовательность точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\ldots}$, которая будет приближаться к искомому экстремуму. Остановившись на некотором значении k, найдем приближенное значение экстремума.

б) Метод градиентного спуска.

Снова выберем произвольную начальную точку $\mathbf{x}^{(0)} \in D$. Зададим некоторый шаг $h > 0$. Положим

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\vec{\nabla} f(\mathbf{x}^{(0)}),$$

если решаем задачу на поиск максимума, и

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - h\vec{\nabla} f(\mathbf{x}^{(0)}),$$

если решаем задачу на поиск минимума. И т.д. В результате также приходим к последовательности точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\ldots}$, приближающейся к экстремуму.

в) Метод случайного спуска.

Выбираем произвольную начальную точку $\mathbf{x}^{(0)} \in D$. Зададим некоторый шаг $h > 0$. На каждой итерации алгоритма выбираем произвольное (случайное) направление $\vec{l}$. Предположим, что решается задача на поиск максимума (для минимума все аналогично). Тогда положим

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + h\vec{l},$$

если $f(\mathbf{x}^{(0)} + h\vec{l}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$, и

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)},$$

если $f(\mathbf{x}^{(0)} + h\vec{l}) \le f(\mathbf{x}^{(0)})$. И т.д. Перебирая случайно на каждой итерации алгоритма различные направления, получим последовательность точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,\ldots}$, приближающуюся к экстремуму.

Если сравнивать между собой описанные три подхода, то метод покоординатного спуска наиболее простой, но наиболее медленно сходящийся. Метод градиентного спуска быстро сходящийся, но более сложный (он требует на каждом шаге вычисления градиента функции). Метод случайного спуска представляет собой нечто среднее между первыми двумя подходами. Есть различные модификации описанных подходов, ориентированные на решение тех или иных специфических задач.

При реализации описанных подходов приходится сталкиваться со следующими стандартными проблемами:

1) Проблема многоэкстремальности. Экстремумов у функции может быть много, и где они расположены, мы не знаем. Применяя какой-то метод, мы найдем какой-то из экстремумов, но не факт, что глобальный. Чтобы повысить вероятность обнаружения глобального экстремума, часто проводят спуск, начиная с различных начальных точек $\mathbf{x}^{(0)} \in D$.

2) Проблема выбора шага. В методах градиентного и случайного спуска требуется задать какой-то шаг h. Если его задать большим, то мы можем "перепрыгнуть" через экстремум. Если задать малым, то движение в сторону экстремума будет долгим. Обычно сначала выбирают большой шаг, а в процессе движения к экстремуму его постепенно уменьшают.

3) В градиентном методе предполагается вычисление на каждой итерации алгоритма градиента функции. Это может оказаться проблематично, если функция сложная, или неизвестная в виде формулы. Есть различные методы приближенной оценки градиента. Если функция недифференцируемая, то есть специальные методы негладкой оптимизации.

4) Все описанные подходы хорошо работают, если искомый экстремум располагается внутри области D. Если же экстремум располагается на границе или вблизи ее, возникает множество сложностей. В этом случае используют специальные алгоритмы, составляющие основу такого раздела теории оптимизации, как "Математическое программирование".

Подробнее проблема поиска экстремума функции в нетривиальных случаях исследуется в других дисциплинах ("Численные методы", "Линейное и динамическое программирование", "Методы оптимизации", "Теория оптимальных решений", "Методы негладкого анализа", и т.д.)

§ Теорема о неявной функции

Пусть имеется уравнение
$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Определение. *Будем говорить, что уравнение (1) задает функцию* $y = y(x)$ *неявно, если* $F(x, y(x)) \equiv 0$.

Пример. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Оно неявно задает функции $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. Заметим, что через каждую точку окружности (2) проходит только одна из этих кривых, за исключением двух точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ (в этих двух точках явная кривая определена неоднозначно).

Теорема (о неявной функции). *Пусть точка* $M_0 = (x_0, y_0)$ *удовлетворяет уравнению (1), функция* $F(x, y)$ *непрерывна в окрестности этой точки и имеет там непрерывную частную производную* $\frac{\partial F}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} \neq 0$. *Тогда можно указать такое* $\delta > 0$, *что найдется единственная непрерывная функция* $y = y(x)$, *заданная на интервале* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *и удовлетворяющая условиям:*

1) $F(x, y(x)) \equiv 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

2) $y(x_0) = y_0$.

Если дополнительно предположить, что функция $F(x, y)$ *имеет в окрестности точки* M_0 *непрерывную частную производную* $\frac{\partial F}{\partial x}$, *то тогда указанная функция* $y(x)$ *будет дифференцируемой на интервале* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *и*

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Доказательство. По условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} \neq 0$. Пусть для определенности $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} > 0$ (в противном случае все аналогично). Функция $\frac{\partial F}{\partial y}$ — непрерывна в окрестности точки M_0, значит, можно найти такое $\delta_1 > 0$, что $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ при $(x, y) \in \Omega$, где
$$\Omega = \{(x, y):\ x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1),\ y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)\}.$$
Тогда функция $F(x_0, y)$ строго возрастает по y на промежутке $[y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$. Поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, то получаем

$$F(x_0, y_0 - \delta_1) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta_1) > 0.$$

Функция $F(x, y)$ — непрерывна в окрестности точки M_0, значит, можно найти такое $\delta \in (0, \delta_1]$, что
$$F(x, y_0 - \delta_1) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta_1) > 0$$
при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (см. рисунок 1).

Тогда для $\forall \bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеем

$$F(\bar{x}, y_0 - \delta) < 0, \quad F(\bar{x}, y_0 + \delta) > 0,$$

что по теореме Коши — Больцано влечет: $\exists \bar{y} \in [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$: $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, причем, в силу строгого возрастания функции $F(\bar{x}, y)$ по y на промежутке $[y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$, получаем, что значение $\bar{y}$ будет единственным. Таким образом, построили непрерывную функцию $y(x)$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяющую условиям 1) и 2) теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Выберем произвольную точку $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и зададим приращение этого аргумента: Δx (считаем, что $(\bar{x} + \Delta x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). Положим $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y(\bar{x} + \Delta x) = \bar{y} + \Delta y$.

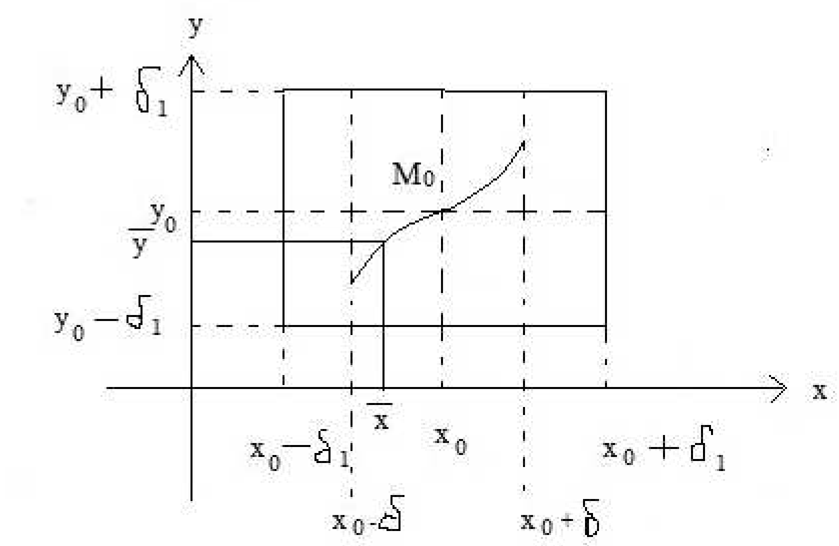

Рис. 1.

Обе точки $(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y)$ принадлежат найденной кривой $y = y(x)$, т.е.

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) = 0.$$

Тогда, учитывая дифференцируемость функции $F(x, y)$, получаем

$$0 = \Delta F = F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F(\bar{x}, \bar{y}) = F'_x(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + F'_y(\bar{x}, \bar{y})\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Отсюда

$$0 = F'_x(\bar{x}, \bar{y}) + F'_y(\bar{x}, \bar{y})\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, установим требуемое: $y'(\bar{x}) = -F'_x(\bar{x}, \bar{y})/F'_y(\bar{x}, \bar{y})$. Теорема доказана.

Для вычисления производной функции, заданной неявно, можно использовать обычные правила дифференцирования сложных функций. Пусть функция $y(x)$ задается неявно уравнением (1). Тогда получаем тождество

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Продифференцируем его

$$F'_x + F'_y y' \equiv 0.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления первой производной $y'(x) = -F'_x/F'_y$. Если продифференцировать это тождество еще раз:

$$\left(F''_{x^2} + F''_{xy}y'\right) + \left[\left(F''_{yx} + F''_{y^2}y'\right)y' + F'_y y''\right] \equiv 0,$$

то получим выражение для второй производной $y''(x)$, и т.д.

Пример. Пусть
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Тогда
$$2x + 2yy' = 0,$$
т.е. $y'(x) = -x/y$. Далее
$$1 + y'^2 + yy'' = 0,$$
откуда $y'' = -(1 + y'^2)/y = -(x^2 + y^2)/y^3$, и т.д.

Аналогично можно ввести понятие неявной функции нескольких переменных.

Пусть имеется уравнение
$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0. \tag{3}$$

Определение. *Говорят, что уравнение (3) задает функцию* $y = y(x_1, \dots, x_n)$ *неявно, если* $F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$.

Теорема (о неявной функции нескольких переменных). *Пусть точка* $M_0 = (\mathbf{x}_0, y_0)$*, где* $\mathbf{x}_0 \in R^n$*, удовлетворяет уравнению (3), функция* $F(x_1, \dots, x_n, y)$ *непрерывна в окрестности этой точки и имеет там непрерывную частную производную* $\frac{\partial F}{\partial y}$*, причем* $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \neq 0$*. Тогда можно указать такое* $\delta > 0$*, что найдется единственная непрерывная функция* $y = y(x_1, \dots, x_n)$*, заданная в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}_0$ *и удовлетворяющая там условиям:*

1) $F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$,

2) $y(\mathbf{x}_0) = y_0$.

Если дополнительно предположить, что функция $F(x_1, \dots, x_n, y)$ *имеет в окрестности точки* M_0 *непрерывные частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$*,* $i = 1, \dots, n$*, то тогда указанная функция* $y(x_1, \dots, x_n)$ *будет иметь частные производные в построенной окрестности точки* $\mathbf{x}_0$*, и*
$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично, как и в одномерном случае.

Пример. Пусть
$$x_1^2 + x_2 y^2 = 1.$$
Тогда
$$2x_1 + x_2 2y \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,$$
$$y^2 + x_2 2y \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.$$
Отсюда находим $\partial y/\partial x_1$ и $\partial y/\partial x_2$. Аналогично можно найти и частные производные большего порядка.

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Системы функций

Пусть в области $D \subset R^n$ задан набор функций

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m = y_m(x_1, \ldots, x_n). \end{array} \right. \tag{1}$$

Пусть в указанной области существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n$.

Определение. *Матрица*

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби системы функций (1).

Предположим теперь, что

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(t_1, \ldots, t_l), \end{array} \right.$$

где $(t_1, \ldots, t_l) \in T \subset R^l$. Пусть в области T существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial x_j}{\partial t_k}$, $j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, l$.

Тогда

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Данные соотношения можно переписать в матричном виде:

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(t_1, \ldots, t_l)} = \frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}\frac{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathbb{D}(t_1, \ldots, t_l)}.$$

Определение. *Пусть $m = n$. Тогда определитель матрицы Якоби*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} = \det \frac{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)}$$

называется Якобианом системы (1). Система (1) при этом называется неособой в области D, если ее Якобиан в этой области не равен нулю.

Пусть $m = n$, и система (1) разрешима в области D относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда система функций

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_n) \end{array} \right. \tag{2}$$

называется системой, обратной к системе (1).

Замечание. Вопрос о существовании обратной системы будет рассмотрен в следующем параграфе. Будет доказано, что если $m = n$, и система (1) — неособая в области D, то у у этой системы в данной области существует однозначная обратная система (2).

Теорема (Лаплас). *Пусть $m = n$, и система (1) — неособая. Тогда*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}\frac{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}\frac{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}\frac{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}.$$

Учитывая, что $\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_n)}$ — это единичная матрица, и ее определитель равен 1, получаем требуемое. Теорема доказана.

Определение. *Система функций (1) называется независимой в области D, если не существует функции $F \not\equiv 0$ такой, что*

$$F\left(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_m(x_1,\ldots,x_n)\right) \equiv 0. \tag{3}$$

Продифференцируем тождество (3):

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} \equiv 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Данные тождества можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{A}h \equiv 0.$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbb{D}(y_1,\ldots,y_m)}{\mathbb{D}(x_1,\ldots,x_n)}\right)^T, \quad h = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)^T.$$

Определение. *Рангом функциональной матрицы $\mathbf{A}$ в области D называется максимальный порядок минора матрицы, не равный тождественно нулю в указанной области.*

Теорема. *Для того чтобы система функций (1) была независимой в области D необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие*

$$\mathrm{rang}\mathbf{A} = m.$$

Следствие. *Пусть $m = n$. Тогда для независимости системы функций (1) в области D необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие*

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)} \not\equiv 0.$$

Следствие. *Пусть $\mathrm{rang}\mathbf{A} = r < m$. Тогда среди функций системы (1) можно выбрать r независимых функций, а остальные будут через них выражаться.*

Пример. Рассмотрим систему функций:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 x_3, \quad y_3 = x_1^2 + x_2 x_3.$$

Составим матрицу Якоби:

$$\frac{\mathbb{D}(y_1, y_2, y_3)}{\mathbb{D}(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ 2x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы (Якобиан) тождественно равен нулю, т.е. это особая система в пространстве R^3. Нетрудно заметить, что ранг этой матрицы равен 2, т.е. из данной системы функций можно выбрать две независимые (например, y_1 и y_2), а третья через них выразится ($y_3 = y_1^2 + y_2$).

§ Теорема о системе неявных функций

Пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Определение. *Говорят, что система уравнений (1) задает неявно функции $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)$, если*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема (о системе неявных функций). *Пусть*

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T, \quad \mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})^T,$$

точка $M_0 = (\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)})$ удовлетворяет системе уравнений (1), функции $F_1, \ldots, F_m$ непрерывны в окрестности точки M_0 и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, причем

$$\left.\frac{\mathrm{D}(F_1, \ldots, F_m)}{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{M_0} \neq 0.$$

Тогда можно найти такое $\delta > 0$, что в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$ существует единственный набор непрерывных функций $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий там условиям:

1) $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$,

2) $y_j(\mathbf{x}^{(0)}) = y_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $m = 1$ получаем теорему о неявной функции, доказанную ранее. Предположим, что теорема верна для $(m-1)$-ой неявной функции. Покажем, что тогда она будет верна и для m неявных функций.

Имеем

$$\frac{\mathrm{D}(F_1,\ldots,F_m)}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_m)}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0. \tag{3}$$

Значит, в последней строке данного определителя есть хотя бы один ненулевой элемент. Пусть для определенности $\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Big|_{M_0} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в окрестности точки M_0 из последнего уравнения в системе (1) можно выразить y_m:

$$y_m = \varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}), \tag{4}$$

Подставим (4) в (1). Получим

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(...)) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{m-1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_{m-1}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(...)) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\Phi_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}) = F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1},\varphi(...)) \equiv 0.$$

Обозначим

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(\Phi_1,\ldots,\Phi_{m-1})}{\mathrm{D}(y_1,\ldots,y_{m-1})}\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}_{M_0}.$$

Имеем

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i,k = 1,\ldots,m-1,$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \equiv 0, \quad k = 1,\ldots,m-1.$$

Умножим последний столбец определителя (3) на $\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\Big|_{M_0}$ и прибавим к k-ому столбцу, $k = 1,\ldots,m-1$. Получим

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Big|_{M_0}\Delta.$$

Значит, $\Delta \neq 0$. Тогда по индуктивному предположению в окрестности точки M_0 систему (5) можно разрешить относительно $y_1,\ldots,y_{m-1}$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1,\ldots,x_n). \end{cases}$$

Подставляя эти функции в (4), найдем

$$y_m = \varphi(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(...),\ldots,\varphi_{m-1}(...)).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если дополнительно предположить, что функции $F_1, \ldots, F_m$ имеют в окрестности точки M_0 непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, тогда найденный в теореме набор функций $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)$ будет в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$ иметь частные производные $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Найти эти производные можно путем непосредственного дифференцирования тождеств (2):

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \frac{\mathbb{D}(F_1, \ldots, F_m)}{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

или

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\mathbb{D}(F_1, \ldots, F_m)}{\mathbb{D}(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Замечание. Из теоремы о системе неявных функций следует, что если в некоторой области $D \subset R^n$ задана неособая система гладких функций

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

то у нее в этой области существует однозначная обратная система

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Условный экстремум

Пусть функция
$$F(x_1, \dots, x_{n+m}) \tag{1}$$
задана на множестве $D \subset R^{n+m}$, где
$$D: \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Таким образом, в пространстве R^{n+m} мы имеем область (2), задаваемую набором ограничений в виде равенств (условиями связи). Поведение целевой функции $F(x_1, \dots, x_{n+m})$ нас интересует лишь в пределах этой области.

Определение. *Точка* $\mathbf{x}^{(0)} \in D$ *называется точкой условного максимума (минимума) в задаче (1), (2), если*
$$\exists \delta > 0: \ F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}^{(0)}) \ \left(F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}^{(0)})\right), \ \forall \mathbf{x} \in \left(U_\delta(\mathbf{x}^{(0)}) \cap D\right).$$

Замечание. Ранее были установлены необходимые и достаточные условия локального экстремума для случая, когда точка экстремума является внутренней точкой области задания функции. В таком случае принято говорить о безусловном экстремуме. Задача на условный экстремум характеризуется наличием связей между переменными, в результате чего искомая точка экстремума не будет внутренней точкой области задания функции.

В простейших ситуациях задачу поиска условного экстремума можно свести к задаче поиска безусловного экстремума с помощью метода исключения переменных.

Пусть функции $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n+m}), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_{n+m})$ являются независимыми в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$. Тогда
$$\operatorname{rang} \frac{\mathbb{D}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\mathbb{D}(x_1, \dots, x_{n+m})}\Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} = m.$$

Предположим для определенности, что последние m столбцов этой матрицы Якоби образуют ненулевой минор, т.е.
$$\frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\mathrm{D}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})}\Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} \neq 0. \tag{3}$$

Значит, по теореме о системе неявных функций в окрестности точки $\mathbf{x}^{(0)}$ из уравнений связи (2) можно выразить последние m переменных через первые n:
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n+m} = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{array} \right. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), выразим целевую функцию через независимые переменные:
$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, f_1(...), \dots, f_m(...)). \tag{5}$$

В результате задача (1), (2) на поиск условного экстремума будет сведена к задаче на поиск безусловного экстремума функции (5) (решив ее, найдем оптимальные значения независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, а значения зависимых переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ найдем из условий связи).

Пример. Рассмотрим задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

при условии связи

$$x + y - 1 = 0.$$

Пользуясь условием связи выразим переменную y через x:

$$y = 1 - x.$$

Сводим задачу к поиску безусловных экстремумов функции

$$\Phi(x) = F(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2.$$

Необходимое условие безусловного экстремума:

$$\Phi'(x) = 2x - 2(1 - x) = 0,$$

откуда находим "подозрительную" точку $x = 1/2$. Производная $\Phi'(x)$ в этой точке меняет знак с "$-$" на "$+$", значит, найденная точка — это точка минимума функции $\Phi(x)$. Определив значение y из условия связи, получаем, что точка $(1/2, 1/2)$ — точка условного минимума в исходной задаче.

Описанный подход требует явного нахождения функций (4), что далеко не всегда удается сделать, если условия связи (2) — сложные. Поэтому рассмотрим более универсальный подход — метод множителей Лагранжа.

Построим функцию

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(x_1, \ldots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+m})$$

— функцию Лагранжа. Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — некоторые константы (множители Лагранжа).

Теорема (необходимые условия условного экстремума). *Пусть $\mathbf{x}^{(0)}$ — точка условного экстремума в задаче (1), (2). Предположим, что функции $F, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ непрерыно дифференцируемы по своим аргументам в окрестности этой точки, и выполнено условие (3). Тогда существуют такие постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}^{(0)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = 1, \ldots, n+m. \tag{6}$$

Доказательство. Как и в методе исключения, возьмем систему функций (4) и подставим ее в (1). Получим функцию (5).

Согласно необходимому условию безусловного экстремума, имеем в точке $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$d\Phi(x_1, \ldots, x_n) = dF(x_1, \ldots, x_n, f_1(...), \ldots, f_m(...)) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0. \tag{7}$$

Здесь $dx_1, \ldots, dx_n$ — это приращения независимых переменных, а $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ — это дифференциалы функций (4). Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет не делать между ними различий.

Аналогично, подставим (4) в (2). Дифференцируя полученные тождества и опять пользуясь свойством инвариантности формы первого дифференциала, получим в точке $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0. \end{array} \right. \tag{8}$$

Умножим i-ое равенство в (8) на некоторое λ_i и прибавим к (7), $i = 1, \ldots, m$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} dx_j = 0. \tag{9}$$

Выберем постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, исходя из условий:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = n+1, \ldots, n+m$$

(такие постоянные существуют, в силу условия (3)).

Тогда условие (9) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} dx_j = 0.$$

Для того чтобы данное условие выполнялось при любых независимых $dx_1, \ldots, dx_n$, необходимо, чтобы имели место равенства

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Систему равенств (6) решаем совместно с условиями связи (2) (тогда получаем $(n+2m)$ уравнений с $(n+2m)$ неизвестными). В результате находим точки, "подозрительные" на условный экстремум.

Теорема (достаточные условия условного экстремума). *Пусть в точке* $\mathbf{x}^{(0)}$ *выполнены условия предыдущей теоремы. Предположим, что функции* $F, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *дважды непрерыно дифференцируемы по своим аргументам в окрестности этой точки. Тогда если второй дифференциал*

$$d^2L(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

при множителях Лагранжа, выбранных согласно условиям предыдущей теоремы, сохраняет положительное (отрицательное) значение при любых $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$*, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих соотношениям (8), то тогда точка* $\mathbf{x}^{(0)}$ *является точкой условного минимума (максимума) в задаче (1), (2).*

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что при выполнении соотношений (8) и при выбранных значениях множителей Лагранжа имеет место условие: $d^2\Phi(\mathbf{x}^{(0)}) = d^2L(\mathbf{x}^{(0)})$. Тогда требуемое будет следовать из достаточных условий безусловного экстремума.

Замечание. Поскольку второй дифференциал функции свойством инвариантности формы, вообще говоря, не обладает, то при проверке достаточных условий условного экстремума приходится явно задействовать соотношения (8), вытекающие из условий связи.

Замечание. Условие (3) предполагает, что условия связи в окрестности точки условного экстремума независимы между собой. Если независимость условий связи не очевидна, то можно использовать функцию Лагранжа вида

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda_0 F(x_1, \ldots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+m}).$$

Рассматриваем ее при $\lambda_0 = 1$ (в этом случае имеем все установленные выше результаты) и при $\lambda_0 = 0$ (в этом случае находим точки, в которых условия связи — зависимы; данные точки нуждаются в отдельном исследовании).

Замечание. Можно рассмотреть более общую задачу, когда условия связи имеют вид не только равенств, но и неравенств. Метод Лагранжа можно адаптировать для такого более общего случая. Задачи такого рода рассматриваются в курсе "Математическое программирование".

Пример. Снова рассмотрим задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

при условии связи

$$x + y - 1 = 0.$$

Строим функцию Лагранжа:

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Составляем уравнения (6):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0.$$

Решаем эти уравнения совместно с условием связи. Находим "подозрительную" точку $(1/2,\, 1/2)$ и значение множителя Лагранжа $\lambda = -1$.

Проверяем знак выражения

$$d^2L(1/2,\, 1/2) = 2dx^2 + 2dy^2$$

при условии

$$(dx + dy)\big|_{(1/2,\, 1/2)} = dx + dy = 0.$$

Видим, что $d^2L(1/2,\, 1/2) > 0$ при любых dx, dy, не равных одновременно нулю. Значит, точка $(1/2,\, 1/2)$ — точка условного минимума.

Пример. Решим теперь такую задачу: найти экстремумы функции

$$F(x, y) = xy$$

при условии связи
$$x - y = 0.$$

Строим функцию Лагранжа:
$$L = xy + \lambda(x - y)$$

Составляем уравнения (6):
$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0.$$

Решаем эти уравнения совместно с условием связи. Находим "подозрительную" точку $(0, 0)$ и значение множителя Лагранжа $\lambda = 0$.

Проверяем знак выражения
$$d^2L(0, 0) = 2dxdy$$

при условии
$$(dx - dy)\big|_{(0,0)} = dx - dy = 0.$$

Видим, что тогда $d^2L(0, 0) = dx^2 > 0$ при любом dx, не равном нулю. Значит, точка $(0, 0)$ — точка условного минимума.

ГЛАВА Функции нескольких переменных (продолжение)

§ Касательные и нормали в пространстве R^3

1. Касательные и нормали к кривым в пространстве R^3. Пусть кривая l в трехмерном пространстве задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Будем считать, что кривая l — гладкая (функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[\alpha, \beta]$).

Пусть $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Данному значению параметра соответствует точка на кривой: $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad z_0 = \chi(t_0).$$

Построим касательную прямую к кривой l в точке M_0.

Зададим приращение параметра: Δt. Обозначим $M = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где

$$\bar{x} = \varphi(t_0 + \Delta t), \quad \bar{y} = \psi(t_0 + \Delta t), \quad \bar{z} = \chi(t_0 + \Delta t).$$

Проведем прямую через точки M_0 и M:

$$\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{y - y_0}{\bar{y} - y_0} = \frac{z - z_0}{\bar{z} - z_0},$$

или

$$\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)},$$

или

$$\frac{x - x_0}{\frac{\varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\psi(t_0+\Delta t) - \psi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\chi(t_0+\Delta t) - \chi(t_0)}{\Delta t}}.$$

Тогда устремляя $\Delta t \to 0$, получим уравнение касательной:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}.$$

Плоскость, проходящую через точку M_0 и перпендикулярную касательной прямой, назовем нормальной плоскостью к кривой l в точке M_0:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

2. Касательные и нормали к поверхностям в пространстве R^3. Поверхность в пространстве R^3 может быть задана различными способами. Рассмотрим способы, наиболее часто используемые на практике.

а) Пусть поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in T \subset R^2.$$

Будем считать, что поверхность S — гладкая (функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области T). Пусть

$$\operatorname{rang}\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)}=2 \tag{1}$$

(если ранг меньше 2, то поверхность выродится в кривую, или вообще, в точку).

Пусть $(u_0,v_0)\in T$. Данным значениям параметров соответствует точка на поверхности: $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, где

$$x_0=\varphi(u_0,v_0),\quad y_0=\psi(u_0,v_0),\quad z_0=\chi(u_0,v_0).$$

Рассмотрим две кривые:

$$K_u:\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(u,v_0),\\ y=\psi(u,v_0),\\ z=\chi(u,v_0),\end{array}\right. \qquad K_v:\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(u_0,v),\\ y=\psi(u_0,v),\\ z=\chi(u_0,v),\end{array}\right.$$

Эти две кривые лежат на поверхности S, и они проходят через точку M_0. Согласно пункту 1), векторы

$$\vec{n}_u=(\varphi'_u,\psi'_u,\chi'_u)^T\big|_{M_0},\quad \vec{n}_v=(\varphi'_v,\psi'_v,\chi'_v)^T\big|_{M_0}$$

являются направляющими векторами касательных к кривым K_v и K_u, соответственно.

Тогда вектор $\vec{n}=\vec{n}_u\times\vec{n}_v$ будет перпендикулярен векторам $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$. Имеем

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v\end{vmatrix}_{M_0}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k},$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — орты осей координат,

$$A=\begin{vmatrix}\psi'_u & \chi'_u\\ \psi'_v & \chi'_v\end{vmatrix}_{M_0},\quad B=\begin{vmatrix}\chi'_u & \varphi'_u\\ \chi'_v & \varphi'_v\end{vmatrix}_{M_0},\quad C=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \psi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v\end{vmatrix}_{M_0}.$$

Плоскость, образуемую векторами $\vec{n}_u$ и $\vec{n}_v$, назовем касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0. Уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Вектор

$$\vec{n}_e=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)^T,$$

где

$$\cos\lambda=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\nu=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

будет задавать единичную нормаль к поверхности в точке M_0. Здесь λ,μ,ν — углы, которые образует нормаль с осями координат ($\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — направляющие косинусы нормали). Знак "$\pm$" определяется выбором стороны поверхности.

Определение. *Поверхность называется двусторонней, если нормаль, проходя по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности, возвращается в исходную точку в том же самом направлении.*

Примером односторонней поверхности является "лист Мебиуса". Далее мы полагаем, что рассматриваемые поверхности являются двусторонними.

б) Пусть поверхность S задана в явном виде:

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Снова считаем, что поверхность — гладкая (в области D существуют непрерывные частные производные функции $z(x, y)$ по своим аргументам).

Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$, будет принадлежать поверхности S. Обозначим для краткости

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}.$$

Сведем явное задание к параметрическому:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D.$$

Тогда по уже выведенным формулам имеем:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{vmatrix} = -p, \quad B = \begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{vmatrix} = -q, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Замечание. Можно и наоборот, параметрическое задание сводить к явному. Действительно, пусть поверхность задана в параметрическом виде. Учитывая (1), получаем, что у матрицы Якоби $\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)}$ имеется ненулевой минор второго порядка. Пусть для определенности $\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций параметры u и v можно выразить через x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, откуда приходим к явному заданию поверхности $z = \chi(u(x, y), v(x, y))$.

в) Пусть поверхность S задана в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Снова предполагаем гладкость этой поверхности (существование непрерывных частных производных функции $F(x, y, z)$ по своим аргументам). Считаем, что в каждой точке поверхности хотя бы одна из производных F'_x, F'_y, F'_z отлична от нуля (иначе будем иметь вырожденный случай).

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности S, т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Пусть для определенности $F'_z\big|_{M_0} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции уравнение поверхности можно переписать в явном виде:

$$z = z(x, y).$$

По доказанному ранее имеем:

$$A = -\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{M_0}, \quad B = -\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{M_0}, \quad C = 1.$$

Значит, уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 примет вид:

$$\frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{M_0}(x-x_0)+\frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{M_0}(y-y_0)+(z-z_0)=0,$$

или

$$F'_x\big|_{M_0}(x-x_0)+F'_y\big|_{M_0}(y-y_0)+F'_z\big|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Замечание. Ясно, что явный способ задания поверхности $z = z(x,y)$ может быть сведен к неявному: $z - z(x,y) = 0$. Таким образом, рассмотренные три способа задания поверхности эквивалентны между собой, в том смысле что один может быть сведен к другому. В каждой конкретной задаче можно выбрать наиболее удобный из них. Если поверхность задана каким-то другим образом, то, как правило, ее сводят к одному из рассмотренных выше стандартных способов задания.

Пример. Пусть поверхность S — это сфера радиуса R с центром в начале координат. Тогда ее можно задать следующим образом:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

— неявный вид, или

$$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

— явный вид (знак "$\pm$" задает верхнюю и нижнюю полусферы), или

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & R\cos u\cos v,\\ y & = & R\sin u\cos v, \qquad\qquad u\in[0,2\pi],\quad v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ z & = & R\sin v,\end{array}\right.$$

— параметрический вид (здесь в качестве параметризации выбрана сферическая система координат, в которой u — географическая долгота, v — географическая широта).

Пусть, например, $R = 5$, $M_0 = (3,0,4)$. Для построения касательной плоскости и нормали используем неявный способ задания поверхности. Тогда, обозначая $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, имеем

$$F'_x=2x,\quad F'_y=2y,\quad F'_z=2z.$$

Значит, уравнение касательной плоскости в точке M_0 будет иметь вид:

$$6(x-3)+0(y-0)+8(z-4)=0.$$

Единичная нормаль к рассматриваемой поверхности задается вектором

$$\vec{n}_e=\pm\left(\frac{3}{5},\,0,\,\frac{4}{5}\right)^T$$

(знак "$+$" соответствует внешней нормали, знак "$-$" — внутренней).

Если для построения касательной плоскости и нормали воспользоваться другими способами задания поверхности, ответ, естественно, окажется тем же самым.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных

§ Двойной интеграл

Пусть функция $f(x, y)$ определена в связной и простой (т.е. ограниченной простым, несамопересекающимся замкнутым контуром) области $D \subset R^2$.

Будем считать, что D — ограниченная область, и функция $f(x, y)$ ограничена там.

Разобьем область D на n произвольных простых, связных, непересекающихся кусочков:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \qquad (D_i \cap D_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим $d_i = \operatorname{diam} D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Величину $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$ назовем рангом дробления области D.

Найдем ΔS_i — площадь области D_i, $i = 1, \ldots, n$. Выберем произвольные точки: $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

и назовем ее суммой Римана.

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, *причем он не зависит от способа дробления области* D *и от выбора точек* (ξ_i, η_i), $i = 1, \ldots, n$, *то он называется двойным (Римановым) интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* D. *Обозначим его:* $\iint\limits_D f(x, y)\, dS$.

Замечание. Если двойной интеграл существует, то предел суммы Римана, согласно определению, не зависит от способа дробления области D. Тогда без потери общности можно выбрать самый простой способ дробления — с помощью прямых, параллельных осям координат. В этом случае область D разобьется на прямоугольники (на границе области данные прямоугольники могут быть обрезанными, но при ранге дробления, стремящимся к нулю, этим можно пренебречь). Тогда, если D_i — прямоугольник со сторонами Δx_i, Δy_i, то получим $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Поэтому в двойном интеграле часто используют также следующее обозначение: $dS = dxdy$, и пишут: $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$.

Рассмотрим свойства двойного интеграла:

1) пусть $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = I$, и $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ в области D, за исключением точек, лежащих на некоторой кривой в D, причем $\tilde{f}(x, y)$ — ограничена в D. Тогда получаем, что $\iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dxdy = I$;

2) $\iint\limits_D 0\, dxdy = 0$;

3) $\iint\limits_D 1\, dxdy = S(D)$, где $S(D)$ — площадь области D;

4) если $S(D) = 0$, то $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = 0$;

5) если $f(x, y) \geq 0$ в области D, то $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \geq 0$;

6) если $D = D_1 \cup D_2$ $(D_1 \cap D_2 = \emptyset)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy;$$

7) если $f(x,y) = c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)$, где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x,y)\,dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x,y)\,dxdy;$$

8) если $f(x,y) \geq g(x,y)$ в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy;$$

9) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy;$

10) если $m \leq f(x,y) \leq M$ в области D, где $m, M = \mathrm{const}$, то

$$m\,S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M\,S(D).$$

Во всех выписанных свойствах предполагается, что соответствующие интегралы существуют. Доказательство свойств вытекает непосредственно из определения двойного интеграла.

Теорема (о среднем). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Тогда найдется такая точка $(a,b) \in D$, что*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(a,b)\,S(D).$$

Доказательство. В силу свойства 1), без потери общности можно считать, что область D замкнута (функцию $f(x,y)$ можно доопределить на границе области D). Тогда по теореме Вейерштрасса, функция $f(x,y)$ ограничена в области D и достигает там своих максимального и минимального значений. Пусть

$$m = \min_D f(x,y), \quad M = \max_D f(x,y).$$

Согласно свойству 10) имеем:

$$m\,S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M\,S(D).$$

Если $S(D) = 0$, то доказательство очевидно. Предположим, что $S(D) > 0$. Тогда

$$m \leq \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M.$$

По теореме Коши — Больцано (о промежуточных значениях функции): $\exists (a,b) \in D$:

$$\frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(a,b).$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Пример физического приложения двойного интеграла. Пусть имеется плоская пластина D, и $\rho(x,y)$ — плотность пластины в точке $(x,y) \in D$. Требуется найти массу пластины. Приближенно массу пластины можно вычислить так:

$$M(D) \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и при введении суммы Римана. Тогда, устремляя ранг дробления к нулю, придем к точной формуле:

$$M(D) = \iint\limits_D \rho(x,y)\, dxdy.$$

Аналогично можно вычислить значение электрического заряда, "размазанного" по плоской пластине, и т.д.

Рассмотрим условия существования двойного интеграла.

Снова дробим область D, как при построении суммы Римана. Положим

$$m_i = \inf_{D_i} f(x,y), \quad M_i = \sup_{D_i} f(x,y), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Построим суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i,$$

и назовем их нижней и верхней суммами Дарбу, соответственно.

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1) На любом дроблении области D верно:

$$s \le \sigma \le S.$$

2) Пусть дробление τ_2 области D мельче дробления τ_1 (т.е. τ_2 получено путем дальнейшего размельчения τ_1). Тогда если s_1, S_1 — суммы Дарбу, построенные для дробления τ_1, s_2, S_2 — суммы Дарбу, построенные для дробления τ_2, то

$$s_2 \ge s_1, \quad S_2 \le S_1,$$

т.е. при ранге дробления, стремящимся к нулю, нижняя сумма растет, а верхняя — убывает.

3) Пусть τ_1 и τ_2 — произвольные дробления области D (не обязательно, что одно мельче другого), и пусть s_1, S_1 и s_2, S_2 — суммы Дарбу, построенные для этих двух дроблений. Тогда:

$$s_1 \le S_2, \quad s_2 \le S_1,$$

т.е. любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней.

Из указанных свойств сумм Дарбу вытекает следующий критерий интегрируемости:

Теорема. *Для существования интеграла* $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{\omega \to 0} (S - s) = 0.$$

Доказательство теоремы, также как и доказательство свойств сумм Дарбу, проводится аналогично одномерному случаю.

Можно сформулировать более простое достаточное условие существования интеграла:

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то она там интегрируема, т.е.* $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Доказательство. Как и ранее, без потери общности считаем, что D — замкнутая область. Тогда по теореме Кантора функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в области D, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall \omega:\ 0 < \omega < \delta\ \Rightarrow\ 0 \le (M_i - m_i) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда имеем:

$$0 \le S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta S_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \varepsilon\, S(D).$$

Получили, что $\lim\limits_{\omega \to 0}(S - s) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что непрерывность функции — это только достаточное условие интегрируемости, но не необходимое.

Установим теперь геометрический смысл двойного интеграла.

Пусть $f(x,y) \ge 0$ при $(x,y) \in D$. Зададим поверхность $z = f(x,y)$. Тогда тело:

$$T = \{(x,y,z)^T \in R^3:\ 0 \le z \le f(x,y), \quad (x,y) \in D\},$$

расположенное под указанной поверхностью, называется криволинейным брусом.

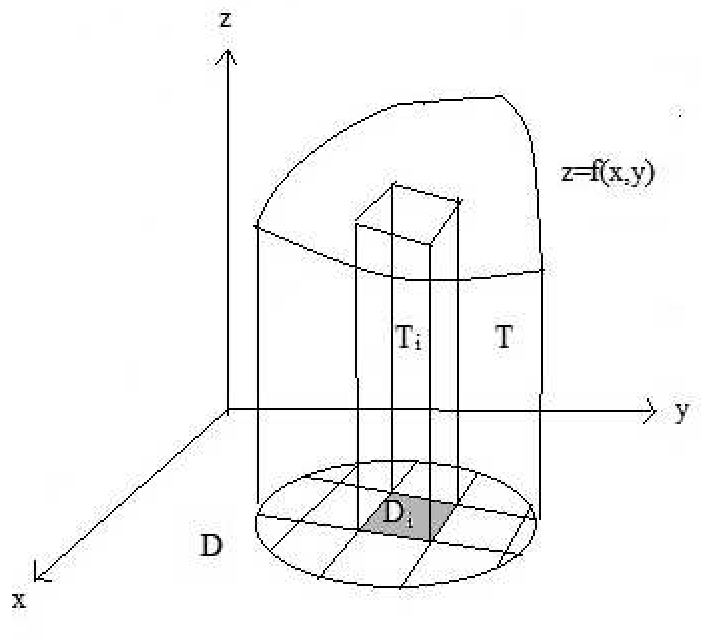

Рис. 1.

Дроблению области $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ соответствует дробление тела $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, т.е.

$$T_i = \{(x,y,z)^T \in R^3:\ 0 \le z \le f(x,y), \quad (x,y) \in D_i\}$$

(см. рисунок 1).

Обозначим ΔV_i — объем тела T_i, $i = 1, \ldots, n$. Имеем:

$$m_i \Delta S_i \leq \Delta V_i \leq M_i \Delta S_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $V(T)$ — объем всего криволинейного бруса T. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \leq V(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i.$$

Устремляя ранг дробления области D к нулю, с учетом критерия интегрируемости функций, получим:

$$V(T) = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy,$$

т.е. значение двойного интеграла равно объему соответствующего криволинейного бруса.

Пример. Рассмотрим интеграл $\iint\limits_D (1-x-y)\, dxdy$, где область D изображена на рисунке 2 а.

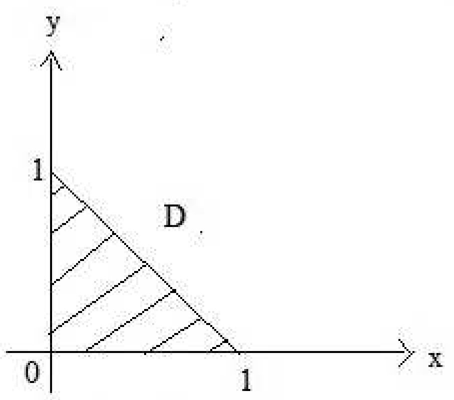

Рис. 2 а.

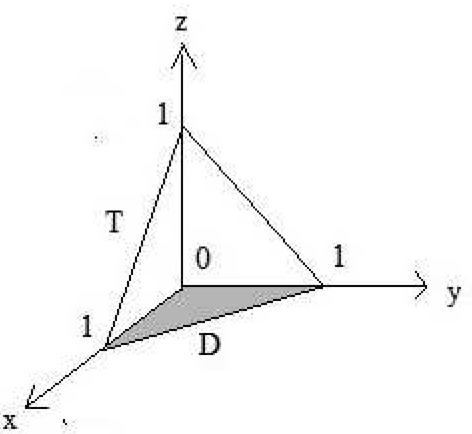

Рис. 2 б.

Криволинейный брус в данном случае — это пирамида (см. рисунок 2 б). Вспоминая, чему равен объем пирамиды, получаем, что

$$\iint\limits_D (1-x-y)\, dxdy = V(T) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Аналогично можно установить более общие результаты. Пусть задано тело:

$$T = \{(x,y,z)^T : \ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y), \ (x,y) \in D\}.$$

Здесь знак функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ может быть произвольным. Тогда:

$$V(T) = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right)\, dxdy.$$

Замечание. Если область D является неограниченной и/или функция $f(x,y)$ не ограничена в D, то тогда интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ называется несобственным. Выберем произвольную ограниченную область $D' \subset D$, такую что функция $f(x,y)$ ограничена в D'. Тогда положим

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{D' \to D} \iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy.$$

Если данный предел существует, конечен и не зависит от выбора области D' и от способа стремления D' к D, то говорят, что несобственный интеграл сходится (в противном случае, интеграл называется расходящимся).

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Правила вычисления двойного интеграла

Пусть требуется вычислить $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Считаем, что он — "собственный".

Предположим, что область D задается условиями (см. рисунок 1 а):

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 :\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}.$$

Если область D задана какими-то более сложными условиями, то разобьем ее на части указанного вида.

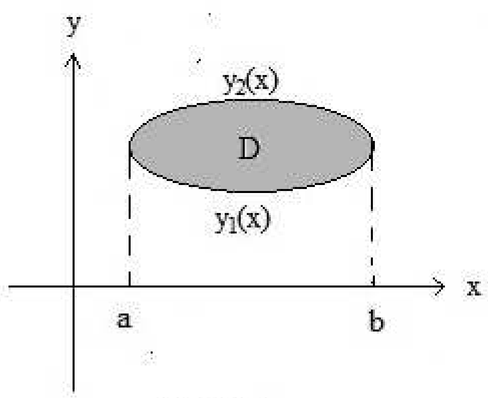

Рис. 1 а.

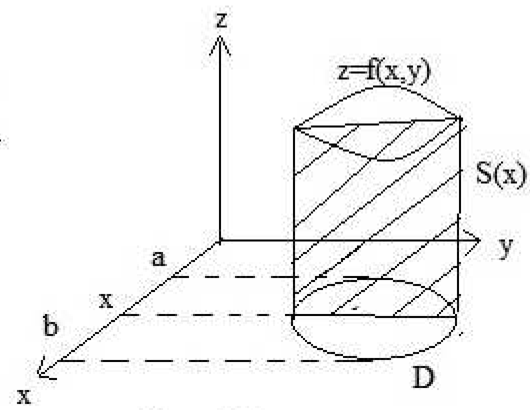

Рис. 1 б.

Допустим, что $f(x,y) \ge 0$ при $(x,y) \in D$. Обозначим через T — криволинейный брус, лежащий под поверхностью $z = f(x,y)$. Зафиксируем $x \in [a,b]$ и проведем сечение бруса плоскостью $x = \text{const}$ (см. рисунок 1 б). Пусть $S(x)$ — площадь указанного сечения. Используя геометрический смысл одномерного определенного интеграла, получаем:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

С другой стороны, вспоминая приложение одномерных определенных интегралов к вычислению объема тела, имеем:

$$V(T) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Значит,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = V(T) = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Обычно используют следующую форму записи в виде так называемого повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Здесь внутренний интеграл вычисляется по переменной y (переменная x при этом рассматривается как постоянный параметр), а внешний интеграл вычисляется по переменной x.

Аналогично, предположим, что та же самая область D представлена в виде:

$$D = \{(x, y)^T \in R^2 : \; x_1(y) \le x \le x_2(y), \; c \le y \le d\}.$$

Тогда, проделывая такие же рассуждения, придем к другому повторному интегралу:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Ясно, что обе найденные формулы дают один и тот же ответ. Какой из них удобнее пользоваться, зависит от специфики конкретной задачи.

Пример. Снова, как и в прошлом параграфе, рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D (1 - x - y)\, dxdy,$$

где область D изображена на рисунке 2 а.

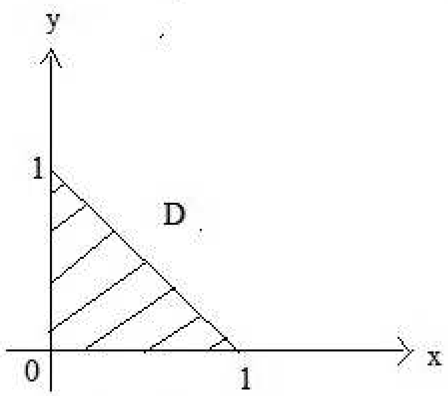

Рис. 2 а.

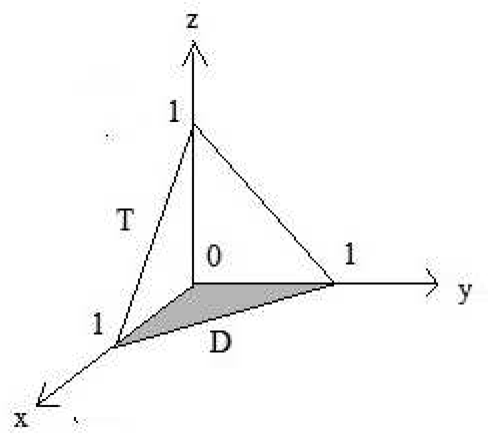

Рис. 2 б.

Тогда имеем:

$$\iint\limits_D (1 - x - y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2})\, dx = (\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

или, что то же самое:

$$\iint\limits_D (1 - x - y)\, dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - x - y)\, dx = \ldots = \frac{1}{6}.$$

Пример. Сведем двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ к повторному, для области D, изображенной на рисунке 3.

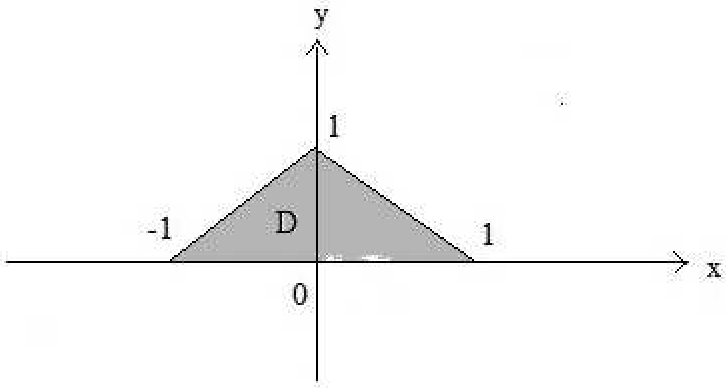

Рис. 3.

Получаем:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy,$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Формулы сведения двойного интеграла к повторным были выведены выше, исходя из геометрического смысла. При этом предполагалось, что $f(x,y) \geq 0$ в области D. На самом деле, данное предположение излишнее. Те же самые формулы могут быть выведены и без него.

Лемма. *Пусть функция $f(x,y)$ задана в прямоугольнике:*

$$P = \{(x,y)^T : \ c \leq y \leq d, \ a \leq x \leq b\},$$

и пусть существуют интегралы $\int_c^d f(x,y)\,dy$ при $\forall x \in [a,b]$ и $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} f(x,y)\,dy.$$

Для доказательства леммы достаточно прямоугольник P разбить на маленькие прямоугольники и расписать суммы Римана и Дарбу для используемых в формуле интегралов. Тогда с учетом того, что площади прямогугольников вычислять легко, установим требуемое.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ задана в области*

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \ a \leq x \leq b\},$$

и пусть существуют интегралы $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ при $\forall x \in [a,b]$ и $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Область D — ограничена (мы рассматриваем "собственные" интегралы). Значит, можно построить прямоугольник

$$P = \{(x,y)^T: \ c \le y \le d, \ a \le x \le b\},$$

такой что $D \subset P$. Зададим функцию

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ 0 & \text{при} \quad (x,y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_P f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f^*(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{P\setminus D} f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Отсюда, применяя лемму, находим:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_P f^*(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \left(\int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x,y)\,dy \right) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Теорема доказана.

§ Криволинейные интегралы 1-ого рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая l, вдоль которой определена функция $f(x,y)$. Полагаем, что кривая l имеет конечную длину, и функция $f(x,y)$ ограничена на этой кривой.

Разобьем кривую l на n произвольных кусочков:

$$A = M_0 \smile M_1 \smile \ldots \smile M_n = B.$$

Здесь A — начало кривой, B — конец кривой, $M_0, \ldots, M_n$ — точки дробления, лежащие на кривой.

Обозначим через ΔS_i — длину дуги $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Величину $\omega = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta S_i$ назовем рангом дробления кривой.

Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$, выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_i) \in M_i \smile M_{i+1}$.

Построим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$*, причем он не зависит от способа дробления кривой* l *и от выбора точек* (ξ_i, η_i), $i = 0, \ldots, n-1$, *то он называется криволинейным интегралом* 1*-ого рода от функции* $f(x,y)$ *по кривой* l*. Обозначим его:* $\int\limits_{(l)} f(x,y)\,dS$.

Для криволинейного интеграла 1-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования, по аналогии с тем, как мы это делали для одномерного и двойного Римановых интегралов.

В частности, отметим, что:

1) $\int\limits_{(l)} dS = L(l)$, где $L(l)$ — длина кривой l;

2) $\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dS = \int\limits_{(BA)} f(x,y)\,dS$, т.е. криволинейный интеграл 1-ого рода не зависит от направления движения по кривой l (от ориентации кривой).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 1-ого рода. Пусть l — плоская кривая, $\rho(x,y)$ — плотность кривой в точке (x,y). Тогда нетрудно заметить, что масса кривой может быть вычислена по формуле: $M(l) = \int\limits_{(l)} \rho(x,y)\,dS$.

Расссмотрим правила вычисления криволинейного интеграла 1-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что кривая l задана в явном виде:

$$y = y(x), \quad x \in [a,b],$$

причем функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (x_i, y(x_i))$, $i = 0,\ldots,n$.

Полагая $\xi_i = \tau_i$, $\eta_i = y(\tau_i)$, где $\tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i, y(\tau_i))\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y(x_{i+1}) - y(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} f(x,y)\,dS = (R)\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x)^2}\,dx,$$

где символ (R) служит лишь обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что кривая l задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha,\beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0,\ldots,n$.

Полагая $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\Delta t_i.$$

Здесь $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$, $\Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} f(x,y)\,dS = (R)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t)^2}\,dt,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_{(l)}(x^2+y^2)\,dS$, где l — полуокружность:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0.$$

1) Используем явное задание кривой: $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)}(x^2+y^2)\,dS = (R)\int_{-1}^1 (x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2)\sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\big|_{-1}^1 = \pi.$$

2) Используем параметрическое задание кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0,\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)}(x^2+y^2)\,dS = (R)\int_0^\pi(\cos^2 t + \sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

Замечание. Аналогично можно ввести понятие криволинейного интеграла 1-ого рода в трехмерном пространстве: $\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\,dS$. Здесь l — кривая в R^3, $f(x,y,z)$ — функция, заданная вдоль кривой l. Если кривая l записана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in [\alpha,\beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, то тогда

$$\int\limits_{(l)} f(x,y,z)\,dS = (R)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t)^2 + (\chi'(t))^2}\,dt.$$

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода

Пусть на плоскости Oxy задана кривая l, вдоль которой определена векторная функция $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$. Полагаем, что кривая l имеет конечную длину, и функция $\vec{F}(x,y)$ ограничена на этой кривой.

Разобьем кривую l на n произвольных кусочков (см. рисунок 1):

$$A = M_0 \smile M_1 \smile \ldots \smile M_n = B.$$

Здесь A — начало кривой, B — конец кривой, $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$, — точки дробления, лежащие на кривой.

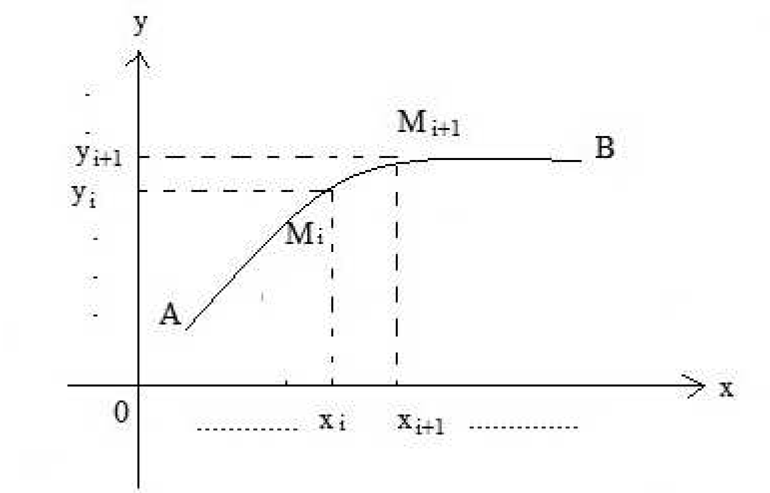

Рис. 1.

Обозначим через ΔS_i — длину дуги $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Величину $\omega = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta S_i$ назовем рангом дробления кривой. Положим

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$, выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_i) \in M_i \smile M_{i+1}$.

Построим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right).$$

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, *причем он не зависит от способа дробления кривой* l *и от выбора точек* (ξ_i, η_i), $i = 0, \ldots, n-1$, *то он называется криволинейным интегралом 2-ого рода от функции* $\vec{F}(x,y)$ *по кривой* l. *Обозначим его:* $\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Для криволинейного интеграла 2-ого рода можно сформулировать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{(BA)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

т.е. криволинейный интеграл 2-ого рода (а точнее, его знак) зависит от направления движения по кривой l (от ориентации кривой).

Замечание. Предположим, что кривая l представляет собой отрезок, параллельный оси Ox: $y \equiv C = \text{const}$, $x \in [a,b]$. Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла 2-ого рода $\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ совпадет с суммой Римана для интеграла $\int_a^b P(x,C)\,dx$. Таким образом, интеграл Римана — это частный случай криволинейного интеграла (или иначе, криволинейный интеграл — это обобщение Риманова интеграла).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 2-ого рода. Пусть под действием силы $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$ тело перемещается по кривой l на плоскости. Требуется найти работу, совершенную силой, по перемещению тела от точки A до точки B. Обозначим через ΔW_i работу, совершенную силой, при перемещении тела по дуге $M_i \smile M_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$\Delta W_i \approx |\vec{F}(\xi_i, \eta_i)| \cdot |\vec{\Delta} l_i| \cos\alpha_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Здесь $\vec{\Delta} l_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ — вектор (хорда), соединяющий точки M_i и M_{i+1} ($\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты осей координат), α_i — угол между векторами $\vec{F}(\xi_i, \eta_i)$ и $\vec{\Delta} l_i$; $i = 0, \ldots, n-1$. Получаем:

$$\Delta W_i \approx (\vec{F}(\xi_i, \eta_i),\, \vec{\Delta} l_i) = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Следовательно, вся работа может быть найдена так:

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right).$$

Устремляя ранг дробления кривой к нулю, придем к формуле:

$$W = \int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Расссмотрим правила вычисления криволинейного интеграла 2-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что кривая l задана в явном виде:

$$y = y(x), \quad x \in [a,b],$$

причем функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (x_i, y(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \tau_i$, $\eta_i = y(\tau_i)$, где $\tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\tau_i, y(\tau_i)) + Q(\tau_i, y(\tau_i))\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) \Delta x_i.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = (R)\int_a^b \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\right)\,dx,$$

где символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что кривая l задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ (кривая гладкая).

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Тем самым, получим дробление кривой l точками $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right) \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + Q(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right) \Delta t_i.$$

Здесь $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$, $\Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\int\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = (R)\int_\alpha^\beta \left(P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\right)\,dt,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_{(l)} (1+x)\,dx + y\,dy$, где l — полуокружность:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0.$$

1) Используем явное задание кривой: $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (1+x)\,dx + y\,dy = (R)\int_{-1}^1 \left(1 + x + \sqrt{1-x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

2) Используем параметрическое задание кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Тогда

$$\int\limits_{(l)} (1+x)\,dx + y\,dy = (R)\int_0^\pi \left((1+\cos t)(-\sin t) + \sin t\cos t\right)\,dt = \int_0^\pi (-\sin t)\,dt = -2.$$

Заметим, что знак в ответе получился разный, поскольку в первом способе мы использовали движение по кривой по часовой стрелке, а во втором — против.

Замечание. Аналогично можно ввести понятие криволинейного интеграла 2-ого рода в трехмерном пространстве: $\int\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$. Здесь l — кривая в R^3, $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z)\,Q(x,y,z)\,R(x,y,z))^T$ — векторная функция, заданная вдоль кривой l. Если кривая l записана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, то тогда

$$\int\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= (R)\int_{\alpha}^{\beta} \left(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\right)\,dt.$$

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру

В данном параграфе рассмотрим интеграл $\oint\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Здесь символ "круга" на интеграле означает, что кривая l — замкнутая. Пусть $D \subset R^2$ — область, ограниченная контуром l. Без потери общности, будем считать, что контур l — простой (несамопересекающийся). В противном случае, его можно разбить на простые куски. Поскольку знак интеграла зависит от направления движения по кривой, то договоримся, что стандартным считается направление, когда область D находится по левую сторону от направления движения. Далее, если не оговорено противное, во всех формулах будем использовать стандартную ориентацию замкнутой кривой.

Теорема. *Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула:*

$$\oint\limits_{(l)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

— формула Грина.

Доказательство. Без потери общности, будем считать, что область D задается условиями (см. рисунок 1):

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \ y_1(x) \le y \le y_2(x), \ a \le x \le b\}.$$

Если область D задана какими-то более сложными условиями, то ее можно разбить на части указанного вида.

Тогда

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx = - \int\limits_{(y_2(x))} P(x,y)dx - \int\limits_{(y_1(x))} P(x,y)dx.$$

Здесь в первом интеграле знак поменялся, поскольку в Римановом интеграле мы двигались вдоль оси Ox слева-направо, а нас интересует движение по кривой $y_2(x)$ — справа-налево. Получаем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = - \int\limits_{(l)} P(x,y)dx.$$

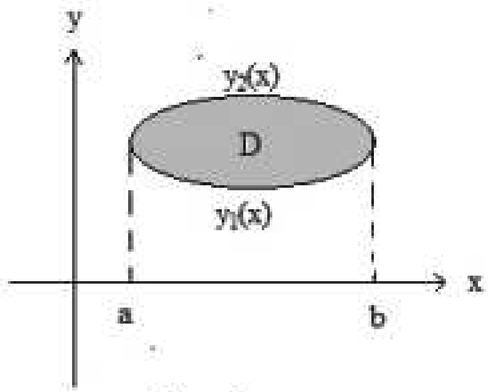

Рис. 1

Аналогично можно доказать, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_{(l)} Q(x,y)dy.$$

Вычитая из второй формулы первую, получим требуемое. Теорема доказана.

С помощью формулы Грина можно вычислять площади плоских фигур. Положим $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$. Тогда формула Грина примет вид:

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = - \oint\limits_{(l)} y\, dx.$$

Аналогично, если положить $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, то получим

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \oint\limits_{(l)} x\, dy.$$

Можно также записать:

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint\limits_{(l)} x\, dy - y\, dx.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой l:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

(лист Декарта). Здесь $a > 0$. Полагая $y = tx$, запишем уравнение кривой в параметрическом виде:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

График кривой l изображен на рисунке 2.

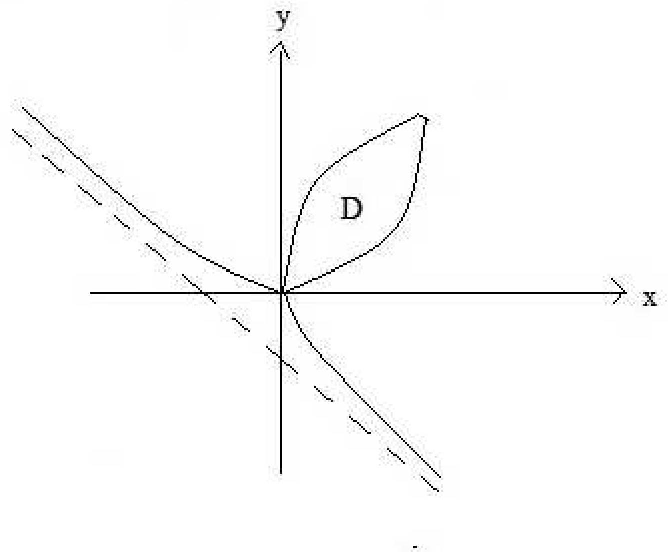

Рис. 2.

Нетрудно заметить, что "петля" на графике соответствует изменению параметра: $t \in [0, +\infty)$. Следовательно,

$$S(D) = \left| \oint\limits_{(l)} x\, dy \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{3at}{1+t^3} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} \right)' dt \right| = \ldots .$$

Модуль здесь поставлен на тот случай, если мы не угадали со стандартным движением по контуру, образуемому петлей кривой l.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру (продолжение)

Определение. *Область $D \subset R^2$ называется односвязной, если любой замкнутый контур L, лежащий в D, ограничивает область, целиком входящую в D (см. рисунок 3).*

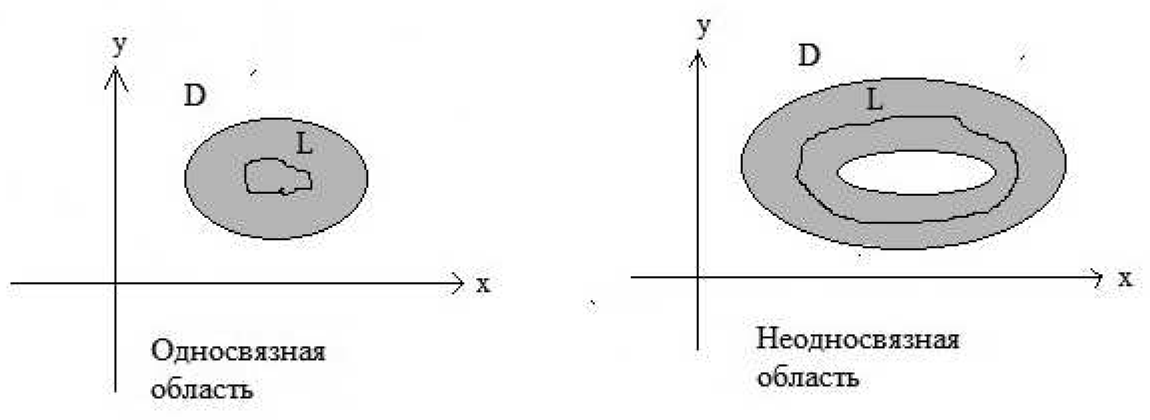

Рис. 3.

Теорема. *Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура $L \subset D$ выполнялось условие:*

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

необходимо, а если область D односвязная, то и достаточно, чтобы в области D имело место соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказательство. *Достаточность.* Выберем произвольный замкнутый контур $L \subset D$. Тогда по формуле Грина имеем требуемое:

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Здесь $D' \subset D$ — область, ограниченная контуром L.

Необходимость. Предположим, что $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in D$: $\frac{\partial Q}{\partial x}\big|_{(\bar{x},\bar{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\big|_{(\bar{x},\bar{y})}$. Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\big|_{(\bar{x},\bar{y})} > 0$. Не умаляя общности, считаем, что $(\bar{x}, \bar{y})$ — внутренняя точка области D. Тогда $\exists \delta > 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0, \quad \forall (x, y) \in D',$$

где $D' = U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ — сферическая δ-окрестность точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Выберем в качестве контура L границу окрестности D'. Применяя формули Грина и теорему о среднем, получаем

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\hat{x},\hat{y})} \pi\delta^2 > 0.$$

Здесь $(\hat{x}, \hat{y}) \in D'$. Приходим к противоречию с условиями теоремы. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любых двух точек $A, B \in D$ значение интеграла $\int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ вдоль кривой $L \subset D$, соединяющей точки A и B, не зависело от вида кривой L необходимо, а если область D односвязная, то и достаточно, чтобы в области D имело место соотношение*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказательство. *Достаточность.* Выберем две произвольные точки $A, B \in D$ и две произвольные кривые $L_1, L_2 \subset D$, соединяющей точки A и B. Тогда кривая $A - L_1 - B - L_2 - A$ образует замкнутый контур в D (см. рисунок 4).

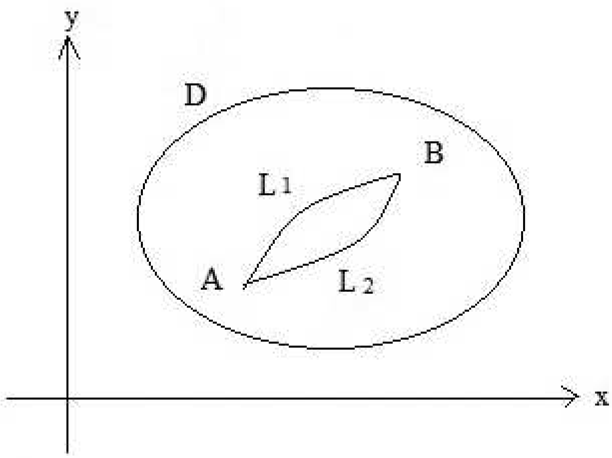

Рис. 4.

С учетом предыдущей теоремы, имеем

$$0 = \oint\limits_{(A-L_1-B-L_2-A)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$\int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{(B-L_2-A)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int\limits_{(A-L_2-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(A-L_1-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(A-L_2-B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Необходимость. Пусть $\exists(\bar{x},\bar{y}) \in D$: $\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})}$. Тогда, как это показано в предыдущей теореме, найдется замкнутый контур $L \subset D$ такой, что

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \neq 0.$$

Выберем две точки A и B на этом контуре. Тогда, проделывая те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности, придем к противоречию. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы существовала такая функция $\Phi(x,y)$, что*

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

необходимо, а если область D односвязная, то и достаточно, чтобы в области D имело место соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Тогда

$$P(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

По теореме о равенстве смешанных производных получаем требуемое.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в области D. Функцию $\Phi(x,y)$ построим в виде криволинейного интеграла с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Здесь (x_0,y_0) — произвольная точка из области D, а интеграл считается по произвольной кривой, лежащей в D и соединяющей точки (x_0,y_0) и (x,y) (согласно предыдущей теореме, от вида кривой значение интеграла не зависит).

Получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x,y) - \Phi(x,y)}{\Delta x} = (\text{см. рис. 5 а}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y),$$

где точка ξ находится между точками x и $x + \Delta x$.

Аналогично показывается, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y).$$

Значит, $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Теорема доказана

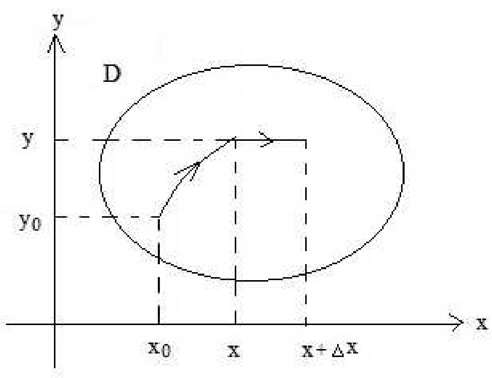

Рис. 5 а.

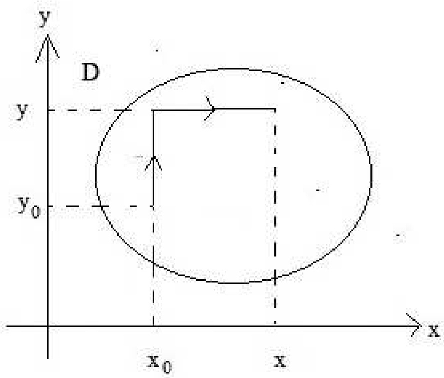

Рис. 5 б.

Замечание. При доказательстве последней теоремы была предложена формула для нахождения функции $\Phi(x,y)$. Упростим ее. Поскольку значение криволинейного интеграла не зависит от вида кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), то выберем кривую, указанную на рисунке 5 б. Тогда получим

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.$$

Здесь в последнем выражении присутствуют обычные Римановы интегралы.

Замечание. Если выполнены условия последней теоремы, то тогда для любых точек $A, B \in D$ интеграл по кривой, соединяющей эти точки, будет равен:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(AB)} d\Phi(x,y) = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Пример. Пусть $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = x^2 y$. Эти функции непрерывны в R^2 и имеют непрерывные частные производные, причем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy.$$

Значит, интеграл по любому замкнутому контуру будет равен нулю. Например,

$$\oint\limits_{x^2+y^2=1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \Big[x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos t\sin^2 t(-\sin t) + \cos^2 t\sin t\cos t\big)\ dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin 4t\,dt = 0.$$

Найдем теперь $\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy$, где L — кривая, соединяющая две точки $A=(0,0)$ и $B=(1,1)$. Поскольку от вида кривой значение интеграла не зависит, то можно, например, взять L: $y=x$ (или $y=x^2$, или $y=x^3$, и т.д.). Получим

$$\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 (x^3+x^3)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Можно вычислить интеграл по-другому. Выберем $x_0=y_0=0$. Найдем

$$\Phi(x,y) = \int_0^x xy^2\,dx + \int_0^y 0^2y\,dy = \frac{1}{2}x^2y^2.$$

Тогда

$$\int\limits_{(L)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \Phi(1,1)-\Phi(0,0) = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, уравнение можно переписать в дифференциальной форме:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то уравнение называется уравнением в полных дифференциалах. Найдем $\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. Тогда семейство кривых $\Phi(x,y)=C$, где C — произвольная константа, задает общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

Замечание. Пусть в области D действует сила $\vec{F} = (P(x,y),Q(x,y))^T$. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в области D, то тогда сила $\vec{F}$ называется потенциальной, а скалярная функция $\Phi(x,y)$: $d\Phi = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, называется потенциалом. В этом случае, работа, совершенная силой по перемещению тела от точки A до точки B, равна

$$W = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \Phi(B)-\Phi(A)$$

(она зависит от начального и конечного положения тела, и не зависит от пути перемещения). Примеры потенциальных сил: гравитационная сила (сила Ньютона), электростатическая сила (сила Кулона), и т.п. Всевозможные силы сопротивления, трения, и т.п., потенциальными не являются.

Пример. Пусть шарик скатывается с горы, высоты H. Начальная скорость шара равна 0. Найти скорость, которую приобретет шар, скатившись с горы. Трением и сопротивлением воздуха пренебрежем.

Поскольку в задаче учитывается только потенциальная гравитационная сила, то от формы горки ничего не зависит. Все определяется начальной высотой (H) и конечной (0). Решить задачу можно, например, используя закон сохранения энергии. Пусть Π_A, K_A, Π_B, K_B — потенциальная и кинетическая энергия тела в начальной точке A и конечной точке B, соответственно. Тогда

$$\Pi_A + K_A = \Pi_B + K_B.$$

Отсюда находим, что

$$mgH = \frac{mv^2}{2},$$

где v — искомая скорость тела в точке B. Получаем $v = \sqrt{2gH}$.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Криволинейные интегралы 2-ого рода по замкнутому контуру (продолжение)

Пусть область D окружена простым контуром l, и пусть в области D за исключением одной особой точки M заданы непрерывные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим произвольный простой замкнутый контур $L \subset D$. Вычислим

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = w.$$

Если точка M находится вне этого контура, то, согласно доказанной ранее теореме, $w = 0$ (область D в этом случае можно обрезать, убрав особую точку). Если же точка M находится внутри контура L, то, вообще говоря, $w \neq 0$. Можно доказать, что значение w от вида контура не зависит. Если контур L не простой, то тогда

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = nw,$$

где n — количество витков, совершенных контуром вокруг точки M (все витки предполагаются совершенными в одну сторону, каждый виток, совершенный в противоположную сторону, изменит значение интеграла на величину $(-w)$). Аналогично можно рассмотреть случай наличия в области D нескольких особых точек (подробнее см. ТФКП).

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{(x^2+y^2=1)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Движение по заданной окружности осуществляется против часовой стрелки.

Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

для всех точек $(x,y) \neq (0,0)$. В точке $(0,0)$ указанные производные не существуют, причем эта точка находится внутри заданного контура.

Получаем

$$\oint\limits_{(x^2+y^2=1)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \Big[x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

т.е. каждый виток против часовой стрелки вокруг особой точки $(0,0)$ прибавляет к значению интеграла величину 2π.

Полученные в настоящем параграфе результаты можно перенести и на трехмерное пространство.

Теорема. *Пусть односвязная область $D \subset R^3$ окружена простой поверхностью, и пусть в этой области заданы непрерывные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, имеющие там непрерывные частные производные по своим аргументам. Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

1) $\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$ *для любой замкнутой кривой* $L \subset D$*;*

2) $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ *не зависит от вида кривой, соединяющей точки* $A, B \in D$*;*

3) $\exists \Phi(x,y,z)$*:* $d\Phi = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$*;*

4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

Доказательство теоремы следует из формулы Стокса (см. далее).

При выполнении условий теоремы имеем:

$$\Phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz,$$

где в качестве (x_0,y_0,z_0) можно взять любую точку из области D. При этом верно:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \Phi(B) - \Phi(A).$$

§ Замена переменных в двойном интеграле

Пусть заданы две плоские прямоугольные системы координат Oxy и $O\xi\eta$, и пусть $D \subset Oxy$, $\Delta \subset O\xi\eta$. Будем считать, что область D ограничена простым кусочно-гладким контуром l, а область Δ — простым кусочно-гладким контуром K (см. рисунок 1). Предположим, что между областями D и Δ установлено взаимно-однозначное соответствие, причем граничным точкам одной области соответствуют граничные точки другой области (т.е. $D \leftrightarrow \Delta$, $l \leftrightarrow K$).

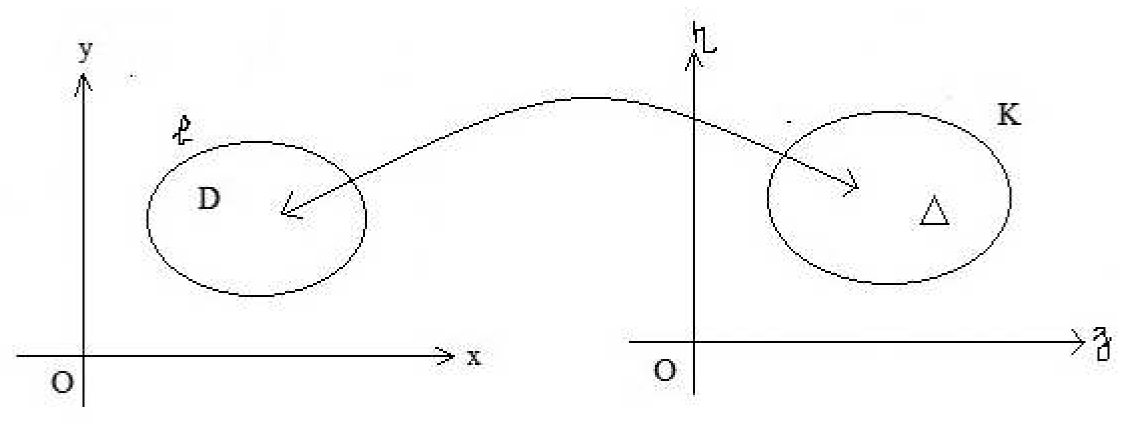

Рис. 1.

Пусть отображение области Δ в область D задается формулами:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \Delta, \tag{1}$$

а обратное отображение области D в область Δ — формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{array} \right. \qquad (x,y) \in D. \tag{2}$$

Будем считать, что функции (1), (2) непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам. Тогда по теореме о системе неявных функций, взаимная однозначность отображения областей D и Δ друг в друга означает, что

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \neq 0$$

в области Δ, и

$$\frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(x,y)} \neq 0$$

в области D, причем, согласно теореме Лапласа:

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(x,y)} = 1.$$

Пусть Λ — простая кусочно-гладкая кривая в области Δ, заданная в параметрическом виде:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Тогда ей будет взаимно-однозначно соответствовать простая кусочно-гладкая кривая L в области D:

$$x = x(t) = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(t) = y(\xi(t), \eta(t)), \qquad t \in [t_1, t_2],$$

причем, если кривая Λ — замкнутая, то и кривая L будет таковой. Однако, если движение по контуру Λ выбрано стандартным, то движение по контуру L, полученному в результате преобразования (1), может оказаться как стандартным, так и не стандартным.

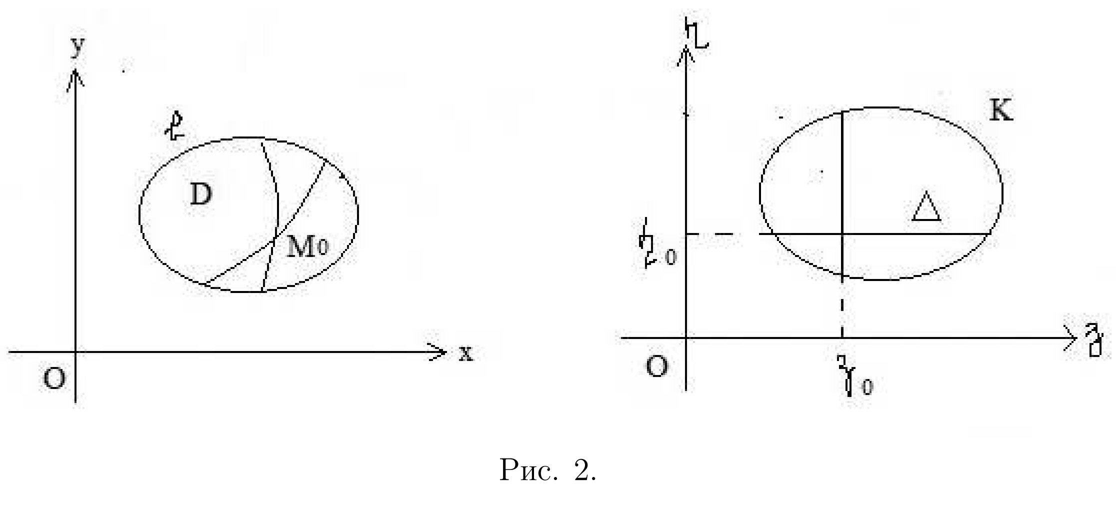

Рис. 2.

Определение. *Пусть* $(\xi_0, \eta_0) \in \Delta$. *Тогда кривые семейств*

$$N_\xi : \left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi, \eta_0), \\ y = y(\xi, \eta_0), \end{array} \right. \qquad N_\eta : \left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi_0, \eta), \\ y = y(\xi_0, \eta), \end{array} \right.$$

лежащие в области D, называются координатными линиями, а переменные ξ, η — криволинейными координатами.

Кривые семейств N_ξ и N_η целиком заполняют область D (получаем криволинейную координатную сетку), причем в силу взаимной однозначности отображения (1), через каждую точку $M_0 = (x(\xi_0, \eta_0), y(\xi_0, \eta_0)) \in D$ проходит ровно одна кривая из каждого семейства N_ξ и N_η (см. рисунок 2).

Пример. Рассмотрим полярную систему координат:

$$x = \xi \cos \eta, \quad y = \xi \sin \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta.$$

В этом случае, семейства координатных линий состоят из лучей, выходящих из начала координат (семейство N_ξ), и окружностей с центром в начале координат (семейство N_η).

Предположим, что $(\xi, \eta) \in \Delta$, где

$$\Delta = \{(\xi, \eta)^T : \ 0 < \xi_1 \le \xi \le \xi_2, \ 0 \le \eta_1 \le \eta \le \eta_2 < 2\pi\}.$$

Тогда получим, что $(x, y) \in D$, где область D представляет собой усеченный круговое сектор (см. рисунок 3).

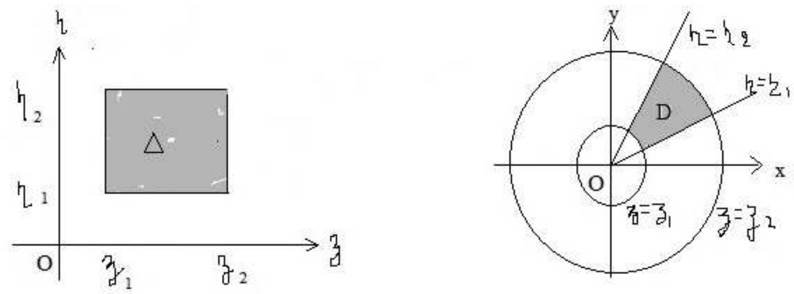

Рис. 3.

Если мы начнем обходить область Δ по границе в стандартном направлении, то тогда соответствующее движение по границе области D также будет идти в стандартном направлении. Заметим, что если использовать полярные координаты в виде:

$$x = \xi \sin \eta, \quad y = \xi \cos \eta, \quad (\xi, \eta) \in \Delta,$$

то область D не изменится, однако, направление движения по контурам из этой области будет противоположно направлениям движения по контурам из Δ (т.е. в результате замены переменных стандартное направление изменится на нестандартное, и наоборот). Поэтому для удобства обычно используют полярные координаты в первом указанном варианте.

Найдем Якобиан преобразования для полярных координат:

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \cos \eta & -\xi \sin \eta \\ \sin \eta & \xi \cos \eta \end{vmatrix} = \xi.$$

Отметим, что если

$$\Delta = \{(\xi, \eta)^T : \ 0 \le \xi \le \xi_2, \ 0 \le \eta \le 2\pi\},$$

то отображение области Δ в область D будет не взаимно-однозначным. Однако, если взять область

$$\Delta_\delta = \{(\xi,\eta)^T:\ 0 < \delta \le \xi \le \xi_2,\ 0 \le \eta \le 2\pi - \delta\},$$

где $\delta > 0$, то получим $\Delta_\delta \to \Delta$ при $\delta \to 0$, т.е. не взаимно-однозначное преобразование в данном случае можно представить как предел взаимно-однозначного. Поэтому результаты, которые будут установлены далее для взаимно-однозначных отображений, можно применять и для некоторых типов не взаимно-однозначных отображений, например, для полярных координат в упомянутом выше случае.

Предположим далее, что уравнение контура K (границы области Δ) задается формулами:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Тогда уравнение контура l (границы области D) запишется в виде:

$$x = x(t) = x(\xi(t),\eta(t)), \quad y = y(t) = y(\xi(t),\eta(t)), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Дополнительно предположим, что функции (1) дважды непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам. Будем считать, что движение по контуру l стандартное.

Рассмотрим цепочку преобразований:

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = (\text{формула Грина}) = \oint\limits_{(l)} x\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} x(\xi(t),\eta(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t) \right) dt =$$

$$= \oint\limits_{(K)} x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta = (\text{формула Грина}) =$$

$$= \pm \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(x(\xi,\eta)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right) d\xi\,d\eta =$$

$$= \pm \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right) d\xi\,d\eta =$$

$$= \pm \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi\,d\eta =$$

$$= \pm \iint\limits_\Delta \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_\Delta \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \right| d\xi\,d\eta =$$

$$= J(\hat{\xi},\hat{\eta}) \iint\limits_\Delta d\xi\,d\eta = J(\hat{\xi},\hat{\eta}) S(\Delta).$$

Здесь $S(D)$, $S(\Delta)$ — площади областей D и Δ, соответственно; $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \Delta$,

$$J(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \right|_{(\hat{\xi},\hat{\eta})}$$

— коэффициент Якобина (коэффициент сжатия). Знак "$\pm$" в преобразованиях появился из-за того, что при переходе от системы координат Oxy к системе координат $O\xi\eta$ стандартное направление обхода контуров могло поменяться (или не поменяться) на нестандартное. Из полученных соотношений можно сделать вывод, что если $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} > 0$ в области Δ, то стандартное направление сохраняется при замене координат (в преобразованиях надо использовать знак "$+$"), если же $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} < 0$ в области Δ, то стандартное направление меняется на нестандартное при замене координат (в преобразованиях надо использовать знак "$-$"). Нулю Якобиан $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}$ равняться не может в области Δ, в силу сделанного предположения о взаимной однозначности отображения. Чтобы не задумываться о выборе правильного знака, можно использовать (как это было сделано в преобразованиях) знак модуля.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Замена переменных в двойном интеграле (продолжение)

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и интегрируема при $(x, y) \in D$. Предположим, что*

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \qquad (\xi, \eta) \in \Delta,$$

причем функции $x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ непрерывно-дифференцируемы в области Δ, и $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)} \neq 0$ при $(\xi, \eta) \in \Delta$. Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

Доказательство. Построим суммы Римана для интегралов, присутствующих в формуле (3). Рассмотрим дробления областей D и Δ:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad \Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \quad (D_i \cap D_j = \emptyset, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Поскольку интегралы по условиям теоремы существуют, то предел сумм Римана не зависит от способа дробления областей. Поэтому без потери общности будем считать, что дробления областей D и Δ согласованы друг с другом, в том смысле, что области Δ_i взаимно-однозначно соответствует область D_i, $i = 1, \ldots, n$.

По доказанному ранее: $\exists (\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i) \in \Delta_i$:

$$S(D_i) = J(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i) S(\Delta_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $S(D_i)$, $S(\Delta_i)$ — площади областей D_i и Δ_i, соответственно;

$$J(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i) = \left| \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \right|_{(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i)}$$

— коэффициент Якобиана.

Поскольку предел сумм Римана не зависит от выбора промежуточных точек, то без потери общности зададим

$$\xi_i = \hat{\xi}_i, \quad \eta_i = \hat{\eta}_i,$$
$$x_i = x(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i), \quad y_i = y(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i).$$

Запишем суммы Римана для интегралов из формулы (3):

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(D_i),$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i)) J(\xi_i, \eta_i) S(\Delta_i).$$

Видим, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Тогда, переходя к пределу при ранге дробления, стремящимся к нулю, получим формулу (3). Теорема доказана.

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2+y^2)^3 = 4xy(x^2-y^2).$$

Введем полярную систему координат:

$$x = \xi\cos\eta, \quad y = \xi\sin\eta.$$

Тогда уравнение кривой примет вид:

$$\xi = \sqrt{\sin 4\eta}.$$

График кривой изображен на рисунке 4.

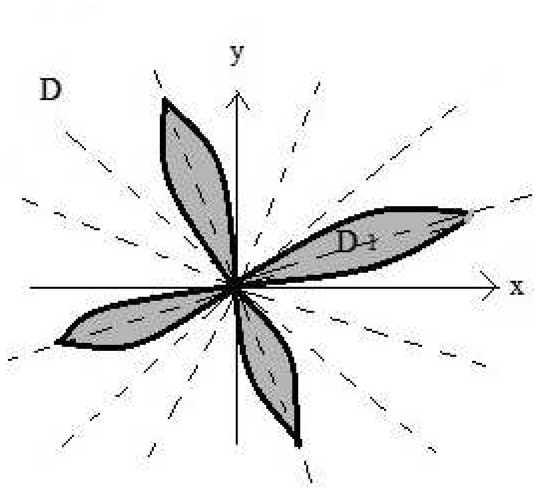

Рис. 4.

Обозначим через D — всю область, ограниченную кривой, а через D_1 — область первого "лепестка". Получаем:

$$S(D) = 4S(D_1) = 4\iint\limits_{D_1} dxdy = 4\iint\limits_{\Delta_1} \xi\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$\Delta_1 = \{(\xi,\eta)^T:\ 0 \le \xi \le \sqrt{\sin 4\eta},\ 0 \le \eta \le \pi/4\}.$$

Значит,

$$S(D) = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\eta \int\limits_0^{\sqrt{\sin 4\eta}} \xi\, d\xi = 1.$$

§ Площадь криволинейной поверхности

Пусть задана поверхность S в явном виде:

$$z = f(x,y), \quad (x,y)\in D.$$

Будем считать, что существуют непрерывные частные производные $p = f'_x$, $q = f'_y$ в области D. Требуется найти площадь поверхности.

Разобьем область D на n произвольных непересекающихся простых кусочков:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Тем самым мы получим дробление поверхности:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Выберем $\forall (x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $z_i = f(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $M_i = (x_i, y_i, z_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим в точке M_i касательную плоскость и нормаль $\vec{n}_i = (\cos\lambda_i, \cos\mu_i, \cos\nu_i)^T$ к поверхности (здесь λ_i, μ_i, ν_i — углы, которые образует нормаль с осями координат), $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через T_i — часть касательной плоскости, отсекаемой вертикальным цилиндром с основанием D_i, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, область D_i будет являться проекцией областей S_i и T_i на плоскость Oxy, $i = 1, \ldots, n$ (см. рисунок 1).

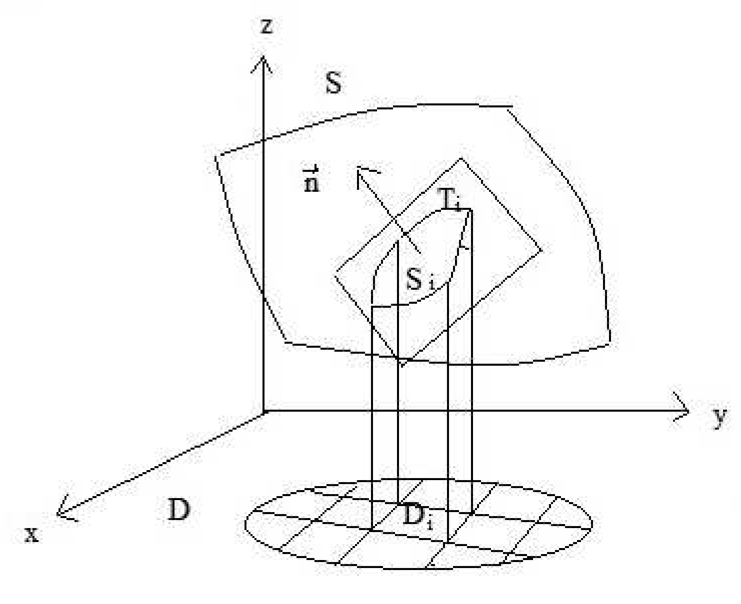

Рис. 1.

Пусть ΔD_i, ΔS_i, ΔT_i — площади областей D_i, S_i, T_i, соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Тогда:

$$\Delta S_i \approx \Delta T_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu_i|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

(у поверхности в точке M_i есть две противоположно направленные нормали, отличающиеся знаком; модуль у косинуса в выписанной формуле поставлен, исходя из геометрического смысла площади).

Отсюда можно найти выражение для площади всей поверхности S:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu_i|}.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|}\,dxdy.$$

Ранее было доказано, что

$$\cos\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Значит,

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \qquad (u,v)\in\Delta, \\ z = \chi(u,v), \end{cases}$$

где функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в области Δ.

Вспомним, что

$$\cos\nu = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где

$$A = \frac{\mathrm{D}(\psi,\chi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad B = \frac{\mathrm{D}(\chi,\varphi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad C = \frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}.$$

Тогда

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|}\,dxdy = \iint_\Delta \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\,|C|\,dudv = \iint_\Delta \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv.$$

Отметим, что если поверхность S — невырожденная, то

$$\operatorname{rang}\frac{\mathbb{D}(\varphi,\psi,\chi)}{\mathbb{D}(u,v)} = 2.$$

Поэтому в каждой точке поверхности хотя бы одна из величин A, B, C — отлична от нуля. Таким образом, если $C=0$ (это будет означать, что нормаль параллельна плоскости Oxy), то поверхность S следует проектировать не на Oxy, как это было сделано выше, а на какую-то из других координатных плоскостей Oxz или Oyz. В результате придем к той же самой формуле для площади поверхности.

Формулу площади поверхности можно записать в другой форме, используя так называемые Гауссовы коэффициенты:

$$E = (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2 + (\chi'_u)^2,$$

$$G = (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2 + (\chi'_v)^2,$$

$$F = \varphi'_u\,\varphi'_v + \psi'_u\,\psi'_v + \chi'_u\,\chi'_v.$$

Нетрудно проверить, что

$$A^2+B^2+C^2 = EG - F^2.$$

Тогда

$$\Delta S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Пример. Найдем площадь параболлоида:

$$z = x^2 + y^2, \quad z \in [0, 4].$$

Имеем:

$$p = 2x, \quad q = 2y,$$

$$\Delta S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy,$$

где

$$D = \{(x, y)^T : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

— проекция параболлоида на плоскость Oxy (в данном случае это будет круг).

Введя полярные координаты $x = \xi \cos\eta$, $y = \xi \sin\eta$, найдем

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} d\eta \int\limits_0^2 \xi \sqrt{1 + 4\xi^2}\, d\xi = \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6}.$$

Пример. Найдем площадь сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Введем сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R\cos u \cos v, \\ y = R \sin u \cos v, \\ z = R \sin v, \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Нетрудно вычислить:

$$E = (-R \sin u \cos v)^2 + (R \cos u \cos v)^2 + 0^2 = R^2 \cos^2 v,$$

$$G = (-R \cos u \sin v)^2 + (R \sin u \sin v)^2 + (R \cos v)^2 = R^2,$$

$$F = (-R \sin u \cos v)(-R \cos u \sin v) + (R \cos u \cos v)(R \sin u \sin v) + 0(R \cos v) = 0.$$

Значит,

$$\Delta S = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos v\, dv = 4\pi R^2.$$

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Поверхностные интегралы 1-ого рода

Пусть в R^3 имеется простая (ограниченная простым кусочно-гладким контуром) двусторонняя поверхность S, в каждой точке которой задана функция $f(x,y,z)$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и функция $f(x,y,z)$ — ограничена на S.

Разобьем поверхность S на n произвольных простых непересекающихся кусочков:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим через ΔS_i — площадь поверхности S_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam} S_i$ — ранг дробления. Выберем $\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Определение. *Если существует конечный предел:* $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, *причем он не зависит от способа дробления поверхности* S *и от выбора точек* (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \ldots, n$, *то он называется поверхностным интегралом* 1*-ого рода от функции* $f(x,y,z)$ *по поверхности* S. *Обозначим его:* $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\, dS$.

Для поверхностного интеграла 1-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что:

1) $\iint\limits_{(S)} dS = \Delta S$, где ΔS — площадь поверхности S;

2) поверхностный интеграл 1-ого рода не зависит от выбора стороны поверхности (от ориентации поверхности).

Пример физического приложения криволинейного интеграла 1-ого рода. Пусть в точке (x,y,z) помещен неподвижный положительный электрический заряд величины q. Тогда если в точке (ξ, η, ζ) поместить единичный отрицательный электрический заряд, то (см. закон Кулона) он будет притягиваться к первому заряду с силой (см. рисунок 1):

$$\vec{F} = -\frac{kq}{r^3}\vec{r},$$

где $k = \text{const} > 0$, $\vec{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)^T$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$. Обозначим $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$. Тогда

$$F_x = -\frac{kq(\xi - x)}{r^3}, \quad F_y = -\frac{kq(\eta - y)}{r^3}, \quad F_z = -\frac{kq(\zeta - z)}{r^3},$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{kq}{r^2}.$$

Предположим теперь, что имеется заряженная поверхность S, и $\rho(x,y,z)$ — плотность электрического заряда в точке $(x,y,z) \in S$. Если разбить поверхность на маленькие кусочки, то каждый кусочек можно приближенно считать точечным зарядом. Тогда записывая для каждого кусочка закон Кулона, суммируя все по всем кусочкам и устремляя ранг дробления к нулю, можно найти силу, которая будет действовать на единичный электрический заряд противоположного знака, помещенный в точке (ξ, η, ζ) (см. рисунок 1): $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$, где

$$F_x = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\xi - x)}{r^3}\, dS,$$

$$F_y = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\eta - y)}{r^3}\, dS,$$

$$F_z = -\iint\limits_{(S)} \frac{k\rho(x,y,z)(\zeta - z)}{r^3}\, dS.$$

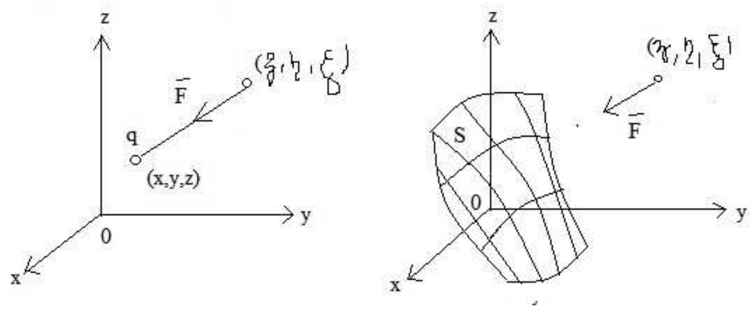

Рис. 1.

Расссмотрим правила вычисления поверхностного интеграла 1-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что поверхность S задана в явном виде:

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

причем функция $z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $p = z'_x$, $q = z'_y$ в области D (поверхность гладкая).

Разобьем область D на n произвольных простых непересекающихся частей:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Тем самым, получим дробление поверхности S:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

Тогда

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy = \sqrt{1+p^2+q^2}\big|_{(\hat{x}_i,\hat{y}_i)} \Delta D_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ΔS_i, ΔD_i — площади областей S_i, D_i; $(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \in D_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Полагая $\xi_i = \hat{x}_i$, $\eta_i = \hat{y}_i$, $\zeta_i = z(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_i, z(\hat{x}_i, \hat{y}_i)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\big|_{(\hat{x}_i, \hat{y}_i)} \Delta D_i.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = (R) \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy,$$

где символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

2) Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

причем функции $\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области Δ (поверхность гладкая).

Разобьем заданную область Δ на n произвольных простых непересекающихся частей: $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$. Тем самым, получим дробление поверхности S: $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Тогда

$$\Delta S_i = \iint\limits_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\big|_{(\hat{u}_i, \hat{v}_i)} S(\Delta_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ΔS_i, $S(\Delta_i)$ — площади областей S_i, Δ_i; $(\hat{u}_i, \hat{v}_i) \in \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$; E, G, F — Гауссовы коэффициенты.

Полагая $\xi_i = \varphi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $\eta_i = \psi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $\zeta_i = \chi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, получаем:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \psi(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \chi(\hat{u}_i, \hat{v}_i)) \sqrt{EG - F^2}\big|_{(\hat{u}_i, \hat{v}_i)} S(\Delta_i).$$

Устремляя ранг дробления к нулю, приходим к формуле:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = (R) \iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

где снова символ (R) служит обозначением Риманова интеграла.

§ Поверхностные интегралы 2-ого рода

Пусть в R^3 имеется простая (ограниченная простым кусочно-гладким контуром) двусторонняя поверхность S, в каждой точке которой задана векторная функция $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и компоненты вектора $\vec{F}(x, y, z)$ — ограничены на S.

Найдем D_x, D_y, D_z — проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy, соответственно.

Разобьем поверхность S на n произвольных простых непересекающихся кусочков:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим ΔS_i — площадь поверхности S_i, $i = 1, \ldots, n$; $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam} S_i$ — ранг дробления.

Пусть D_{xi}, D_{y_i}, D_{zi} — проекции поверхности S_i на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy, а ΔD_{xi}, ΔD_{y_i}, ΔD_{zi} — площади этих проекций, соответственно.

Выберем $\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$. Построим сумму

$$\sigma = \pm \sum_{i=1}^{n} \left(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta D_{xi} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta D_{y_i} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta D_{zi} \right).$$

Здесь выбор знака "$\pm$" определяется выбором стороны поверхности S.

Определение. *Если существует конечный предел: $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, причем он не зависит от способа дробления поверхности S и от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \ldots, n$, то он называется поверхностным интегралом 2-ого рода от векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$ по поверхности S. Обозначим его:*

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy.$$

Для поверхностного интеграла 2-ого рода можно расписать стандартные свойства интегралов и условия существования.

В частности, отметим, что, согласно определению, поверхностный интеграл 2-ого рода (а точнее, его знак) зависит от выбора стороны поверхности (от ориентации поверхности).

Замечание. Предположим, что поверхность S представляет собой кусок плоскости:

$$z = C = \text{const}, \quad (x, y) \in D_z.$$

Нормаль к поверхности выберем, направленную вертикально вверх (т.е. работаем с верхней стороной поверхности). Тогда интегральная сумма σ для поверхностного интеграла совпадет с суммой Римана для двойного интеграла

$$(R) \iint\limits_{D_z} R(x, y, C)\, dxdy.$$

Здесь (R) — представляет собой обозначение Риманова интеграла. Таким образом, двойной Риманов интеграл — это частный случай поверхностного интеграла (или иначе: поверхностный интеграл — это обобщение Риманова интеграла).

Расссмотрим правила вычисления поверхностного интеграла 2-ого рода (сведения его к Риманову интегралу).

1) Предположим, что поверхность S задана в явном виде:

$$S: \ z = z(x, y), \quad (x, y) \in D_z.$$

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\, dxdy = (R) \iint\limits_{D_z} R(x, y, z(x, y))\, dxdy.$$

Аналогично, если

$$S: \ y = y(x,z), \quad (x,z) \in D_y,$$

то

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = (R)\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz.$$

А если

$$S: \ x = x(y,z), \quad (y,z) \in D_x,$$

то

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = (R)\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz.$$

В самом деле, достаточно заметить, что интегральные суммы у интегралов в левых и правых частях соответствующих равенств совпадают.

Значит,

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= (R)\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz + (R)\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz +$$

$$+(R)\iint\limits_{D_z} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Заметим, однако, что данную формулу редко когда удается применить на практике, поскольку она предполагает явное выражение всех трех переменных x, y и z из уравнения поверхности, а это возможно только для самых простейших поверхностей.

2) Предположим теперь, что поверхность S задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u,v) \in \Delta,$$

причем функции $\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные в области Δ (поверхность гладкая).

Пусть $\vec{n}_i = (\cos\lambda_i, \cos\mu_i, \cos\nu_i)^T$ — единичная нормаль к поверхности S в точке (ξ_i, η_i, ζ_i); $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\Delta S_i \approx \frac{\Delta D_{xi}}{|\cos\lambda_i|} \approx \frac{\Delta D_{y_i}}{|\cos\mu_i|} \approx \frac{\Delta D_{zi}}{|\cos\nu_i|}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Эти соотношения позволяют сводить поверхностные интегралы 2-ого рода к поверхностным интегралам 1-ого рода:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz = \pm\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda\,dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz = \pm\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu\,dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu\,dS.$$

Отсюда имеем:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{(S)} \left(P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu\right)\,dS =$$

$$= \pm\,(R)\iint\limits_{\Delta} \Big(P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$

$$+ Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$

$$+ R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv =$$

$$= \pm\,(R)\iint\limits_{\Delta} \left(P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))A +\right.$$

$$\left.+ Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))B + R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))C\right)\,dudv.$$

Здесь

$$A = \frac{\mathrm{D}(\psi,\chi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad B = \frac{\mathrm{D}(\chi,\varphi)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad C = \frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(u,v)}.$$

Пример. Найдем

$$I = \iint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона сферы: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Введем сферические координаты:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& R\cos u\cos v, \\ y &=& R\sin u\cos v, \\ z &=& R\sin v, \end{array}\right. \qquad u\in[0,2\pi], \quad v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Тогда

$$A = R^2\cos u\cos^2 v, \quad B = R^2\sin u\cos^2 v, \quad C = R^2\sin v\cos v.$$

Заметим, что внешней стороне сферы соответствует в выведенной выше формуле знак "+". Получаем:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \big((R\cos u\cos v)(R^2\cos u\cos^2 v) +$$

$$+ (R\sin u\cos v)(R^2\sin u\cos^2 v) + (R\sin v)(R^2\sin v\cos v)\big)\,dv =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3\cos v\,dv = 4\pi R^3.$$

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Формула Стокса

Пусть в R^3 имеется простая двусторонняя поверхность S, в каждой точке которой задана векторная функция $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$. Будем считать, что площадь поверхности — конечна, и компоненты вектора $\vec{F}(x,y,z)$ — ограничены на S.

Запишем уравнение поверхности в параметрическом виде:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u,v) \in \Delta. \tag{1}$$

Будем считать, что функции $\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области Δ по своим аргументам.

Введем обозначения: K — граница (контур) области Δ; L — граница (контур) поверхности S. Полагаем, что в результате отображения (1) точки плоской кривой K переходят в точки пространственной кривой L. Для определенности знака предположим, что стандартному движению по контуру K соответствует стандартное движение по контуру L, и кроме того, выбор стороны поверхности S согласован со стандартным движением по контуру L.

Пусть уравнение контура K задается формулами:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Тогда уравнение контура L запишется в виде:

$$x = x(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad y = y(t) = \psi(u(t), v(t)), \quad z = z(t) = \chi(u(t), v(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Рассмотрим цепочку преобразований:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \right) dt =$$

$$= \oint\limits_{(K)} P \frac{\partial x}{\partial u}\,du + P \frac{\partial x}{\partial v}\,dv = (\text{формула Грина}) =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Таким образом, получили, что

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\, dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint\limits_{(L)} Q(x,y,z)\, dy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dydz,$$

$$\oint\limits_{(L)} R(x,y,z)\, dz = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y}\, dydz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dxdz.$$

Складывая полученные три формулы, находим формулу Стокса:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Отметим, что формула Стокса является распространением формулы Грина на трехмерное пространство.

Формулу Стокса можно записать через поверхностный интеграл 1-ого рода:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\nu \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Здесь $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S.

Замечание. Случай, когда на поверхности S выполняются соотношения:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

называется потенциальным. В этом случае имеет место ряд свойств (см. ранее).

§ Тройной интеграл

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в связной и простой (т.е. ограниченной простой, несамопересекающейся замкнутой поверхностью) области $T \subset R^3$.

Будем считать, что T — ограниченная область, и функция $f(x, y, z)$ ограничена там.

Разобьем область T на n произвольных простых, связных, непересекающихся кусочков:

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \qquad (T_i \cap T_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j).$$

Обозначим $d_i = \operatorname{diam} T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Величину $\omega = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$ назовем рангом дробления области T.

Найдем ΔV_i — объем области T_i, $i = 1, \ldots, n$. Выберем произвольные точки: $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

и назовем ее суммой Римана.

Определение. *Если существует конечный предел: $\lim\limits_{\omega \to 0} \sigma$, причем он не зависит от способа дробления области T и от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \ldots, n$, то он называется тройным (Римановым) интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T. Обозначим его: $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dV$.*

Замечание. Если тройной интеграл существует, то предел суммы Римана, согласно определению, не зависит от способа дробления области T. Тогда без потери общности можно выбрать самый простой способ дробления — с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям. В этом случае область T разобьется на прямоугольные параллелепипеды (на границе области данные параллелепипеды могут быть обрезанными, но при ранге дробления, стремящимся к нулю, этим можно пренебречь). Тогда, если T_i — параллелепипед со сторонами Δx_i, Δy_i, Δz_i, то получим $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. Поэтому в тройном интеграле часто используют также следующее обозначение: $dV = dxdydz$, и пишут: $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz$.

Отметим, что для тройного интеграла будут справедоивы все стандартные свойства интегралов. Также можно сформулировать условия существования интеграла.

Рассмотрим правила вычисления тройного интеграла. Предположим, что область T задается условиями (см. рисунок 1):

$$a \leq x \leq b,$$

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y).$$

Если область T имеет какую-то более сложную форму, то ее можно разбить на куски подобного типа.

Область $D \subset R^2$, задаваемая условиями

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

представляет собой проекцию тела T на плоскость Oxy.

Аналогично двумерному случаю нетрудно доказать, что:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

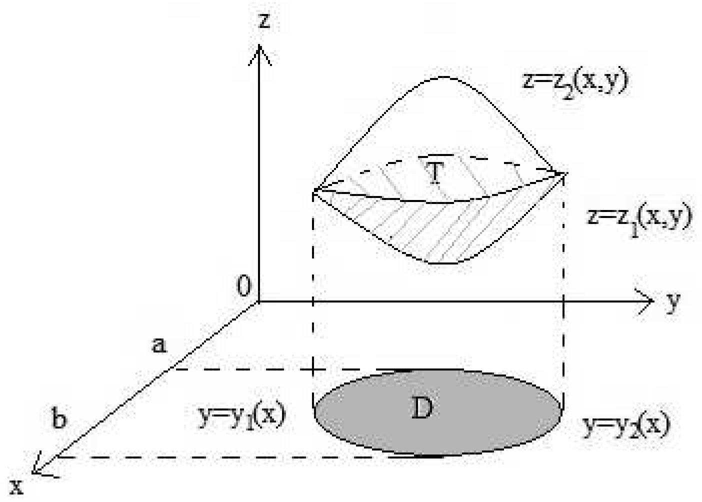

Рис. 1.

Заметим, что тело T можно проектировать на другие координатные плоскости и перебирать переменные x, y, z в другом порядке. Тогда будем приходить к аналогичным повторным интегралам (всего их в трехмерном случае, очевидно, будет 6).

Предположим, что отображение

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \qquad (u,v,w) \in T_1,$$

взаимно-однозначно отображает область T_1 в область T. Пусть функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ имеют непрерывные частные производные в T_1. Тогда

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T_1} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

Пример. Сферические координаты (см. рисунок 2 a):

$$\begin{cases} x &=& w\cos u \cos v, \\ y &=& w \sin u \cos v, \\ z &=& w \sin v. \end{cases}$$

Здесь: w — расстояние до начала координат, u — "географическая долгота", v — "географическая широта". В этом случае

$$\left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)} \right| = w^2 \cos v.$$

Пример. Цилиндрические координаты (см. рисунок 2 б):

$$\begin{cases} x & = & w\cos u, \\ y & = & w\sin u, \\ z & = & v. \end{cases}$$

Здесь переменную z не меняем, а к переменным x, y применяем полярное преобразование. В этом случае

$$\left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}\right| = w.$$

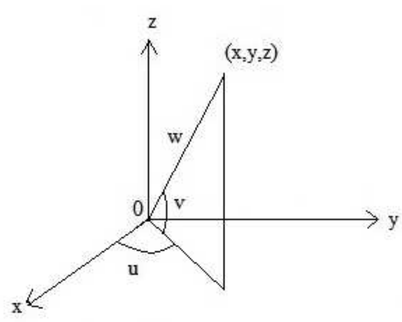

Рис. 2 а.

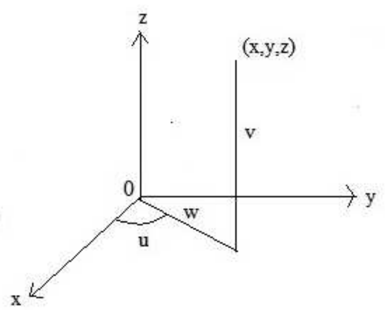

Рис. 2 б.

Пример. Найдем объем шара T:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2.$$

Имеем

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz.$$

Тело T можно описать условиями:

$$-R \le x \le R,$$

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Первые два условия задают проекцию шара на плоскость Oxy. Это будет круг:

$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

Тогда

$$V(T) = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$$

Сделаем сферическую замену координат. Получим

$$V(T) = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{R} dw \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} w^2 \cos v \, dv = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Замечание. Аналогичным образом можно ввести понятие n-мерного Риманова интеграла:

$$\int\limits_T \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Здесь $T \subset R^n$.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Формула Остроградского — Гаусса

Пусть в R^3 имеется тело T, ограниченное простой поверхностью S. Пусть в теле T задана ограниченная векторная функция $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$, имеющая там непрерывные частные производные по своим аргументам.

Предположим, что область T задается условиями (см. рисунок 1):

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

Здесь D — проекция тела T на плоскость Oxy.

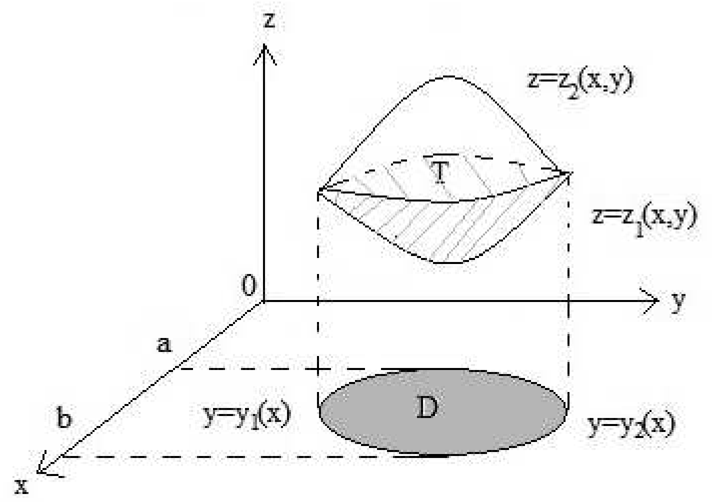

Рис. 1.

Найдем

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\right)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy = \oiint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Здесь S_1 — нижняя граница тела T: $z = z_1(x,y)$, S_2 — верхняя граница тела T: $z = z_2(x,y)$; $(x,y) \in D$. Круг на символе интеграла по поверхности S подчеркивает, что эта поверхность — замкнутая. Для определения знака поверхностного интеграла 2-ого рода, надо определиться с выбором стороны поверхности. Для замкнутых поверхностей стандартной является внешняя сторона поверхности. Если не оговорено противное, то далее все формулы выписываем именно для такой стороны. В Римановом интеграле $\iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$ используется направление по z

от меньшего к большему. Поэтому, когда мы переходим к поверхностному интегралу $\iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy$, мы меняем знак интегралв, чтобы далее иметь дело с нижней стороной поверхности S_1 (нормаль должна смотреть вниз).

Таким образом, получили

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oiint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Аналогичным образом, можно доказать, что

$$\iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \oiint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz,$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \oiint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz.$$

Складывая эти три формулы, приходим к формуле Остроградского — Гаусса:

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dxdydz =$$

$$= \oiint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \oiint\limits_{(S)} \left(P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu\right)\,dS.$$

Здесь $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Замечание. С помощью формулы Остроградского — Гаусса можно вычислять объемы тел. Положим $P = x$, $Q = R = 0$. Тогда получим:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oiint\limits_{(S)} x\,dydz.$$

Аналогично, если положить $P = R = 0$, $Q = y$, то получим:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oiint\limits_{(S)} y\,dxdz,$$

или если положить $P = Q = 0$, $R = z$, то

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \oiint\limits_{(S)} z\,dxdy.$$

Также можно записать:

$$V(T) = \frac{1}{3}\oiint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy.$$

Пример. Найдем

$$I = \oiint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Этот пример мы рассматривали ранее в параграфе про поверхностные интегралы 2-ого рода. Используя формулу Остроградского - Гаусса, можно сразу получить:

$$I = 3 \iiint\limits_{T} dxdydz = 3V(T) = 4\pi R^3.$$

Здесь T — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Пример. Пусть тело T, ограниченное поверхностью S, целиком погружено в жидкость плотности ρ. Найти результирующую силу давления жидкости на тело. В качестве плоскости Oxy возьмем поверхность жидкости, а ось Oz направим вертикально вниз (т.е. переменная z будет означать глубину погружения).

Рассмотрим элементарный участок поверхности тела площади dS. На него давит столбик жидкости с силой $\vec{dF} = (dF_x, dF_y, dF_z)^T$, где

$$dF_x = -g\rho z \cos\lambda dS, \quad dF_y = -g\rho z \cos\mu dS, \quad dF_z = -g\rho z \cos\nu dS.$$

Здесь $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)^T$ — внешняя нормаль к поверхности. Знак "$-$" стоит, потому что сила давления действует по отношению к телу — "снаружи-внутрь".

Суммируя полученные формулы по всей поверхности, найдем результирующую силу $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$, где

$$F_x = -g\rho \oiint\limits_{(S)} z\cos\lambda dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = 0,$$

$$F_y = -g\rho \oiint\limits_{(S)} z\cos\mu dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = 0,$$

$$F_z = -g\rho \oiint\limits_{(S)} z\cos\nu dS = (\text{ф-ла О.-Г.}) = -g\rho \iiint\limits_{T} dxdydz = -g\rho V(T) = -Mg,$$

где M — масса жидкости объема $V(T)$. В результате пришли к закону Архимеда (на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная по величине весу жидкости в объеме заданного тела).

Замечание. Если в теле T выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, то такой случай называется соленоидальным, и тогда будет иметь место ряд свойств (см. далее).

Замечание. Формулы Грина, Гаусса, Остроградского — Гаусса являются аналогами формулы Ньютона — Лейбница для многомерных пространств.

§ Элементы теории поля

Определение. *Пусть в каждой точке области $D \subset R^3$ определена скалярная функция $f(x, y, z)$. Тогда говорят, что в области D задано скалярное поле f.*

Примерами скалярных полей, используемых в физике, являются поле температур, давлений, высот, и т.п.

Определение. *Поверхности вида:* $f(x,y,z) = C$, *где* $C = const$, *называются поверхностями уровня, или эквипотенциальными поверхностями.*

Например, в физике используются изобары, изотермы, изокосты, и т.п.

Определение. *Скалярное поле* f *называется плоским, если его эквипотенциальные поверхности представляют собой набор плоскостей, параллельных друг другу.*

Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = (\vec{\nabla} f, \vec{l}),$$

где $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$, показывает скорость изменения поля в заданной точке в направлении $\vec{l}$. Вектор градиента $\vec{\nabla} f = (f'_x, f'_y, f'_z)^T$ указывает направление наискорейшего возрастания поля, в то время как вектор антиградиента $(-\vec{\nabla} f)$ — направление наискорейшего убывания поля.

Свойства градиента:
1) $\vec{\nabla}(f + C) = \vec{\nabla} f$ $(C = \mathrm{const})$;
2) $\vec{\nabla}(fC) = C\vec{\nabla} f$ $(C = \mathrm{const})$;
3) $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla} f \pm \vec{\nabla} g$;
4) $\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$;
5) $\vec{\nabla}(f/g) = (g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g)/g^2$ $(g \neq 0)$;
6) $\vec{\nabla} F(f) = F'(f)\vec{\nabla} f$.

Определение. *Пусть в каждой точке области* $D \subset R^3$ *определена векторная функция*

$$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T.$$

Тогда говорят, что в области D *задано векторное поле* $\vec{F}$.

Примерами векторных полей, используемых в физике, являются гравитационное поле, электромагнитное поле, поле скоростей, и т.п.

Определение. *Векторной (силовой) линией поля* $\vec{F}$ *называется кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением векторного поля.*

Определение. *Векторное поле* $\vec{F}$ *называется однородным, если* $P, Q, R = const$ *(силовые линии в этом случае представляют собой набор прямых, параллельных друг другу).*

Определение. *Векторное поле* $\vec{F}$ *называется плоским, если все векторы* $\vec{F}$ *расположены в плоскостях, параллельных друг другу, и на каждой из этих плоскостей поле одно и то же.*

Определение. *Пусть* L *— некоторый замкнутый контур в* D. *Через каждую точку контура* L *проведем силовую линию векторного поля* $\vec{F}$. *Тогда поверхность, образованная этими линиями, называется векторной трубкой поля* $\vec{F}$.

ГЛАВА Интегральное исчисление функций нескольких переменных (продолжение)

§ Элементы теории поля (продолжение)

Пусть S — поверхность в R^3? и в каждой точке этой поверхности задано векторное поле $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$. Обозначим через $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)^T$ — единичную нормаль к S.

Рассмотрим

$$(\vec{F}, \vec{n}) = |\vec{F}|\,|\vec{n}|\,\cos\alpha = |\vec{F}|\,\cos\alpha = F_n.$$

Здесь α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{n}$; величина F_n равна длине проекции вектора $\vec{F}$ на нормаль $\vec{n}$ (см. рисунок 1).

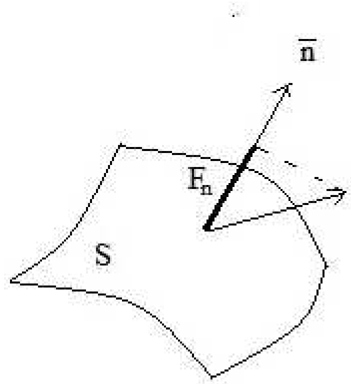

Рис. 1.

Определение. *Поверхностный интеграл* $\iint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS$ *называется потоком векторного поля* $\vec{F}$ *через поверхность* S.

Получаем

$$\iint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(S)} (\vec{F}, \vec{n})\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(P(x,y,z)\cos\lambda + Q(x,y,z)\cos\mu + R(x,y,z)\cos\nu\right)\,dS.$$

Предположим, что поверхность S — замкнутая и ограничивает тело T. Тогда по формуле Остроградского — Гаусса имеем

$$\oiint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Определение. *Величина*

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F}$.

Дивергенция является скалярной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что она не зависит от выбора системы координат. Физически дивиргенция характеризует наличие в рассматриваемой области источников (и поглотителей) поля — массы (для гравитационного поля), электрических зарядов (для электромагнитного поля), и т.д.

Формулу Остроградского — Гаусса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oiint\limits_{(S)} F_n(x,y,z)\,dS = \iiint\limits_{T} \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz.$$

Схематически можно записать: $\mathrm{div}\vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$.

Пусть L — некоторая кривая в R^3.

Определение. *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{(L)} (\vec{F}, \vec{dr}),$$

где $\vec{dr} = (dx, dy, dz)^T$, *называется линейным интегралом векторного поля* $\vec{F}$ *вдоль кривой* L. *Если при этом кривая* L *является замкнутой, то тогда величина*

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{F}$ *вдоль контура* L.

Предположим, что контур L является границей поверхности S. Тогда по формуле Стокса имеем:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Определение. *Вектор*

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)^T$$

называется ротором (вихрем) векторного поля $\vec{F}$.

Ротор является векторной характеристикой векторного поля. Можно доказать, что он не зависит от выбора системы координат. Физически ротор характеризует наличие вращательной компоненты у поля (степень завихрения).

Формулу Стокса можно тогда переписать в следующем виде:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{(S)} \mathrm{rot}_n\vec{F}\,dS.$$

Схематически можно записать: $\mathrm{rot}\vec{F} = [\vec{\nabla} \times \vec{F}]$.

Отметим некоторые свойства дивергенции и ротора:

1) $\mathrm{div}\vec{C}=0$, $\mathrm{rot}\vec{C}=\vec{0}$ ($\vec{C}$ — постоянный вектор);

2) $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{F}\right)=0$;

3) $\mathrm{div}\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\mathrm{div}\vec{F}+\mathrm{div}\vec{G}, \quad \mathrm{rot}(\vec{F}+\vec{G})=\mathrm{rot}\vec{F}+\mathrm{rot}\vec{G}$;

4) $\mathrm{rot}\left(f\vec{F}\right)=f\mathrm{rot}\vec{F}+[\vec{\nabla}f\times\vec{F}]$ (f — скалярное поле);

5) $\mathrm{div}[\vec{F}\times\vec{G}]=(\vec{G},\mathrm{rot}\vec{F})-(\vec{F},\mathrm{rot}\vec{G})$;

6) $\mathrm{rot}\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{0}$ (f — скалярное поле); и т.д.

Определение. *Векторное поле $\vec{F}=(P,Q,R)^T$ называется потенциальным в области $T\subset R^3$, если существует скалярное поле Φ, такое что в указанной области имеет место соотношение $\vec{F}=\vec{\nabla}\Phi$, т.е.*

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Функция Φ в этом случае называется потенциалом поля $\vec{F}$.

Пример. Пусть в точке $O=(0,0,0)$ помещена масса m. Рассмотрим напряженность гравитационного поля, создаваемого этой массой в точке $M=(x,y,z)$, т.е. силу, с которой будет притягиваться к точке O тело массы 1, помещенное в точку M. Согласно закону Ньютона, имеем:

$$\vec{F}=-k\frac{m}{r^3}\vec{r}.$$

Здесь k — постоянная всемирного тяготения, $\vec{r}=(x,y,z)^T$, $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Нетрудно проверить, что

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\frac{km}{r}\right).$$

Значит, гравитационное поле — потенциальное (с потенциалом $\Phi=km/r$).

Теорема. *Пусть T — односвязная область в R^3, и компоненты векторной функции $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) поле $\vec{F}$ — потенциально ($\exists\Phi$: $\vec{\nabla}\Phi=\vec{F}$);

2) поле $\vec{F}$ — безвихревое ($\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{0}$);

3) циркуляция поля $\vec{F}$ по любому контуру L из T равна нулю ($\oint\limits_{(L)}(\vec{F},\vec{dr})=0$);

4) линейный интеграл поля $\vec{F}$ по кривой, соединяющей две точки $A,B\in T$, не зависит от вида кривой, и при этом

$$\int\limits_{(AB)}(\vec{F},\vec{dr})=\Phi(B)-\Phi(A).$$

Определение. *Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным (трубчатым) в области $T\subset R^3$, если существует векторное поле $\vec{G}$, такое что в указанной области имеет место соотношение $\vec{F}=rot\vec{G}$. Вектор $\vec{G}$ в этом случае называется векторным потенциалом поля $\vec{F}$.*

Теорема. *Пусть T — односвязная область в R^3, и компоненты векторной функции $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в этой области. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) поле $\vec{F}$ — соленоидальное ($\exists \vec{G}$: $\mathrm{rot}\vec{G} = \vec{F}$);

2) в области T отсутствуют источники поля $\vec{F}$ ($\mathrm{div}\vec{F} = 0$);

3) поток поля $\vec{F}$ через любую замкнутую поверхность S из области T равен нулю ($\oiint\limits_{(S)} F_n\, dS = 0$);

4) поток поля $\vec{F}$ через любые два поперечных сечения S_1, S_2 произвольной векторной трубки один и тот же

$$\iint\limits_{(S_1)} F_n\, dS = \iint\limits_{(S_2)} F_n\, dS.$$

Теорема (о каноническом разложении силовых полей). *Пусть компоненты векторного поля $\vec{F}$ имеют непрерывные частные производные в области $T \subset R^3$. Тогда $\exists \vec{F}_1, \vec{F}_2$: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, и при этом: $\mathrm{rot}\vec{F}_1 = \vec{0}$, $\mathrm{div}\vec{F}_2 = 0$ (т.е. векторное поле можно разложить на потенциальную и соленоидальную составляющие).*

Будем искать скалярный потенциал Φ так, что $\vec{F}_1 = \vec{\nabla}\Phi$. Тогда

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{\nabla}\Phi.$$

Требуется выполнение условия:

$$\mathrm{div}\vec{F}_2 = \mathrm{div}\vec{F} - \mathrm{div}\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = 0.$$

Заметим, что

$$\mathrm{div}\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

В результате получаем уравнение для нахождения потенциала Φ:

$$\Delta\Phi = \mathrm{div}\vec{F}.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Пуассона). В частном случае, если $\mathrm{div}\vec{F} = 0$, получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0$$

(функция Φ в этом случае называется гармонической).

ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Это несобственный интеграл 1-ого рода. Он сходится по признаку Дирихле. Данный интеграл — неберущийся, т.е. вычислить его по формуле Ньютона — Лейбница не получится. Тем не менее, есть другие подходы к его вычислению.

Положим

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Тогда получаем, что $I = J(0)$.

Имеем

$$J'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Тогда

$$J(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Поскольку $J(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, то находим, что $C = \pi/2$. Значит,

$$J(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + \frac{\pi}{2},$$

и следовательно,

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, однако, что некоторые из сделанных в данном примере преобразований (дифференцирование интеграла по параметру, предельный переход при $\alpha \to +\infty$) нуждаются в обосновании.

§ Равномерная сходимость функций

Будем все расписывать для функции двух переменных, однако, аналогичные результаты можно получить и для функций большего числа аргументов.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную в области $D = X \times Y \subset R^2$.

Определение. *Пусть y_0 — предельная точка множества Y. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$ (пишут $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$), если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y \in Y :\ |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Равномерность сходимости означает, что величина δ в выписанном выше определении не зависит от выбора аргумента x.

Отметим некоторые свойства равномерной сходимости.

Теорема (критерий сходимости Коши). *Для того чтобы функция $f(x, y)$ сходилась при $y \to y_0$ к некоторой конечной функции равномерно относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y_1, y_2 \in Y :\ \big(|y_1 - y_0| < \delta\big)\ \&\ \big(|y_2 - y_0| < \delta\big) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Теорема. *Функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности аргументов $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \in Y$, такой что $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$, последовательность значений функции $f(x, y_n)$ при $n \to +\infty$ сходится к значению $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in X$.*

Данная теорема позволяет свести анализ равномерной сходимости функций к анализу равномерной сходимости функциональных последовательностей. В результате, теоремы, доказанные ранее для последовательностей, удается перенести на функции.

Теорема. *Пусть $X = [a, b]$, и функция $f(x, y)$ — непрерывна (интегрируема) по x на данном отрезке при любом фиксированном значении $y \in Y$ из некоторой окрестности точки y_0. Тогда если функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [a, b]$, то функция $\varphi(x)$ будет непрерывной (интегрируемой) на указанном отрезке $[a, b]$.*

Теорема. *Пусть x_0 — предельная точка множества X, а y_0 — предельная точка множества Y. Тогда если функция $f(x, y)$ сходится при $x \to x_0$ к некоторой функции $\psi(y)$, а также сходится при $y \to y_0$ к некоторой функции $\varphi(x)$, причем хотя бы одна из этих сходимостей является равномерной (относительно второго аргумента), то тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Лемма. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольной области $D = [a, b] \times [c, d]$. Тогда при любом $y_0 \in [c, d]$ функция $f(x, y)$ будет сходиться при $y \to y_0$ к значению $f(x, y_0)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в области D. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x', x'' \in [a, b], \ \forall y', y'' \in [c, d] :$$

$$\big(|x' - x''| < \delta\big) \ \& \ \big(|y' - y''| < \delta\big) \quad \Rightarrow \quad |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Тогда, полагая $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Отметим, что результаты, сформулированные выше для области вида $D = X \times Y$ (например, если $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, то область D будет тогда представлять собой прямоугольник), допускают распространение на двумерные области более общего вида. В частности, последнюю лемму можно переформулировать для произвольной замкнутой ограниченной области D.

§ Собственные интегралы, зависящие от параметра

В настоящем параграфе будем исследовать случай, когда интеграл зависит только от одного параметра. Однако, аналогичные результаты можно получить и для случая, когда имеется большее число параметров.

1. Интегралы с фиксированными границами. Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольной области $D = [a, b] \times [c, d]$ (см. рисунок 1). Будем считать, что эта функция интегрируема по x на промежутке $[a, b]$ при любом фиксированном значении $y \in [c, d]$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

называется интегралом, зависящим от параметра $y \in [c, d]$.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ ($y_0 \in [c, d]$) к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [a, b]$. Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Согласно результатам предыдущего параграфа, функция $\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Из равномерной сходимости имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y \in [c, d] :\ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Тогда при $|y - y_0| < \delta$ получаем

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon(b - a).$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

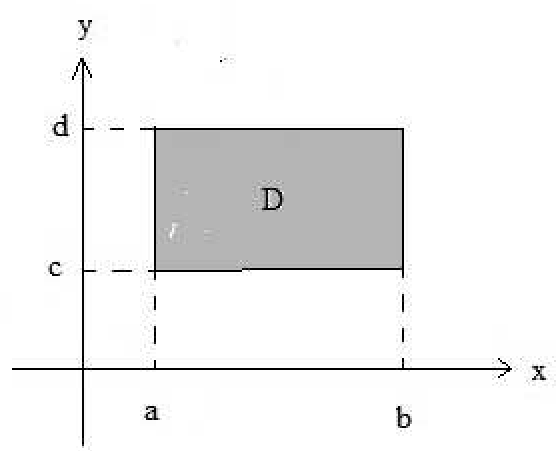

Рис. 1.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c, d]$. Зададим приращение аргумента Δy ($(y_0 + \Delta y) \in [c, d]$). Имеем, что $f(x, y_0 + \Delta y) \to f(x, y_0)$ при $\Delta y \to 0$, равномерно относительно $x \in [a, b]$ (см. лемму из прошлого параграфа). Тогда по теореме о предельном переходе получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} J(y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx = J(y_0),$$

следовательно, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Тогда функция $J(y)$ будет интегрируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Доказательство теоремы следует из свойств двойного интеграла.

Теорема (о дифференциальном переходе) (правило Лейбница). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D , и в этой области существует непрерывная частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Тогда функция $J(y)$ будет дифференцируемой на отрезке $[c,d]$, и*

$$J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Имеем

$$J'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\,dx =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b \frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx.$$

Здесь $\theta \in (0,1)$. Применяя теорему о предельном переходе, и учитывая лемму из предыдущего параграфа, находим требуемое:

$$J'(y) = \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$J(y) = \int_0^1 xy^2\,dx.$$

Вычислим производную этой функции двумя способами. С одной стороны,

$$J(y) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 y^2 = \frac{y^2}{2},$$

и значит,

$$J'(y) = y.$$

С другой стороны,

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\,dx = \int_0^1 2xy\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 2y = y.$$

Получили то же самое.

2. Интегралы с подвижными границами. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области

$$D = \{(x,y)^T \in R^2 : \quad x \in [a(y),b(y)], \quad y \in [c,d]\}.$$

Здесь $a(y)$, $b(y)$ — некоторые ограниченные функции, заданные на отрезке $[c,d]$. Положим

$$\bar{a} = \min_{[c,d]} a(y), \qquad \bar{b} = \max_{[c,d]} b(y)$$

(см. рисунок 2). Будем считать, что функция $f(x,y)$ интегрируема по x на промежутке $[a(y),b(y)]$ при любом фиксированном значении $y \in [c,d]$. Тогда интеграл получим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

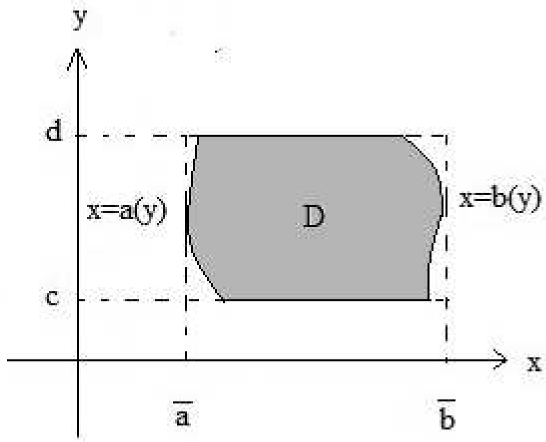

Рис. 2.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ сходится при $y \to y_0$ (здесь $y_0 \in [c, d]$) к функции $\varphi(x)$, равномерно относительно $x \in [\bar{a}, \bar{b}]$ (таких что $(x, y) \in D$), и кроме того, $a(y) \to \hat{a}$ и $b(y) \to \hat{b}$ при $y \to y_0$. Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы, имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall y \in [c, d] :\ |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [\bar{a}, \bar{b}]\ \big((x, y) \in D\big),$$

и кроме того,

$$|a(y) - \hat{a}| < \varepsilon, \qquad |b(y) - \hat{b}| < \varepsilon.$$

Тогда при $|y - y_0| < \delta$ получаем

$$\left| \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx - \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{a(y)}^{\hat{a}} f(x, y)\, dx + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} f(x, y)\, dx + \int_{\hat{b}}^{b(y)} f(x, y)\, dx - \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{a(y)}^{\hat{a}} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_{\hat{b}}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right| + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |f(x, y) - \varphi(x)|\, dx <$$

$$< \varepsilon \left(2M + (\hat{b} - \hat{a}) \right).$$

Здесь $M = \sup\limits_{D} f(x, y)$ (мы в данном параграфе исследуем собственные интегралы, значит, $M \neq \infty$). Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, и функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c, d]$. Зададим приращение аргумента Δy ($(y_0 + \Delta y) \in [c, d]$). Имеем, что $f(x, y_0 + \Delta y) \to f(x, y_0)$ при $\Delta y \to 0$, равномерно относительно аргумента x (см. лемму из прошлого параграфа), и кроме того, $a(y_0 + \Delta y) \to a(y_0)$ и $b(y_0 + \Delta y) \to b(y_0)$ при $\Delta y \to 0$. Тогда по теореме о предельном переходе получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} J(y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \int_{a(y_0+\Delta y)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\, dx = J(y_0),$$

следовательно, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, и функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $J(y)$ будет интегрируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Доказательство теоремы следует из свойств двойного интеграла.

Теорема (о дифференциальном переходе) (обобщенное правило Лейбница). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и имеет там непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Пусть также функции $a(y)$, $b(y)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $J(y)$ будет дифференцируемой на отрезке $[c, d]$, и*

$$J'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f(a(y), y)a'(y) + f(b(y), y)b'(y).$$

Доказательство. Построим функцию

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dx.$$

Тогда $J(y) = F(y, a(y), b(y))$. Используя правило дифференцирования сложных функций, а также учитывая теорему Барроу и доказанное ранее частное правило Лейбница, получаем

$$J'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} a'(y) + \frac{\partial F}{\partial v} b'(y) =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f(a(y), y)a'(y) + f(b(y), y)b'(y).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть

$$J(y) = \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} \frac{e^{xy}}{x}\, dx.$$

Тогда

$$J'(y) = \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} e^{xy}\, dx - \frac{e^{y \sin y}}{\sin y} \cos y + \frac{e^{y^3}}{y^2} 2y =$$

$$= \frac{e^{xy}}{y}\Big|_{\sin y}^{y^2} - \frac{e^{y \sin y} \cos y}{\sin y} + \frac{2e^{y^3}}{y} = \frac{3e^{y^3}}{y} - \frac{e^{y \sin y}(1 + \cos y)}{\sin y}.$$

ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра (продолжение)

§ Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Несобственные интегралы 1-ого рода. Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \in [a,+\infty)$, $y \in [c,d]$ и интегрируема при $x \in [a,A]$, $y \in [c,d]$ для любого $A \geq a$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(A,y), \tag{1}$$

где

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx,$$

называется несобственным интегралом 1-ого рода, зависящим от параметра. Если предел (1) существует и конечен при любом значении параметра $y \in [c,d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется сходящимся на отрезке $[c,d]$. Если при этом $F(A,y) \to J(y)$ при $A \to +\infty$ равномерно относительно $y \in [c,d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[c,d]$.

Таким образом, сходимость означает, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall y \in [c,d],\ \exists \bar{A}(\varepsilon,y) \geq a:\ \forall A \geq \bar{A}\ \Rightarrow\ |J(y) - F(A,y)| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость означает, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a:\ \forall A \geq \bar{A}\ \Rightarrow\ |J(y) - F(A,y)| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c,d].$$

Пример. Пусть

$$J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx,$$

где $y > 0$.

Заметим, что

$$F(A,y) = \int_0^A ye^{-xy}\,dx = 1 - e^{-Ay} \to 1 \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Таким образом, $J(y) = 1$ при $y > 0$. Однако, сходимость на любом интервале вида $(0,d]$ — неравномерная. В то же время, на любом промежутке вида $[c,d]$, где $c > 0$, сходимость — равномерная.

Теорема (Критерий сходимости Коши). *Интеграл $J(y)$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a:\ \forall A_1, A_2 \geq \bar{A}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |F(A_2,y) - F(A_1,y)| = \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c,d].$$

Теорема (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости). *Пусть*

$$|f(x,y)| \leq \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \geq a, \quad y \in [c,d].$$

Тогда если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *равномерно (и абсолютно) сходится на отрезке* $[c,d]$.

Теорема (Признак Дирихле равномерной сходимости). *Пусть функция*

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$$

равномерна ограничена при $A \geq a$, $y \in [c,d]$, *функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *на интервале* $[a,+\infty)$ *при любом фиксированном значении* $y \in [c,d]$, *и* $g(x,y) \to 0$ *при* $x \to +\infty$ *равномерно относительно* $y \in [c,d]$. *Тогда интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на отрезке $[c,d]$.

Теорема (Признак Абеля равномерной сходимости). *Пусть интеграл*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на промежутке $[c,d]$, *функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *на интервале* $[a,+\infty)$ *при любом фиксированном значении* $y \in [c,d]$, *и равномерно ограничена при* $x \geq a$, $y \in [c,d]$. *Тогда интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на отрезке $[c,d]$.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть* $f(x,y) \to \varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ *равномерно относительно* $x \in [a,A]$ *для любого* $A \geq a$, *и интеграл* $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *равномерно сходится на промежутке* $[c,d]$. *Тогда*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Снова положим $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$. По теореме о предельном переходе для собственных интегралов имеем:

$$\lim_{y\to y_0} F(A,y) = \int_a^A \varphi(x)\,dx.$$

С другой стороны:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A,y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

причем эта сходимость равномерная относительно $y \in [c,d]$.

Тогда по теореме о перестановке пределов (см. первый параграф данной главы) получаем:

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0} \lim_{A\to+\infty} F(A,y) = \lim_{A\to+\infty} \lim_{y\to y_0} F(A,y) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \varphi(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$, и интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на промежутке $[c,d]$. Тогда функция $J(y)$ будет непрерывной на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c,d]$. В силу непрерывности, $f(x,y) \to f(x,y_0)$ при $y \to y_0$, причем, согласно лемме из первого параграфа настоящей главы, эта сходимость будет равномерной относительно $x \in [a,A]$ для любого $A \geq a$. Тогда по теореме о предельном переходе:

$$\lim_{y\to y_0} J(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx = J(y_0).$$

Значит, функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. С учетом произвольности выбора этой точки, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c,d]$, и интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на промежутке $[c,d]$. Тогда*

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. По теореме об интегральном переходе для собственных интегралов имеем:

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

для любого $A \geq a$. Перейдем в этой формуле к пределу при $A \to +\infty$. Получим

$$\lim_{A\to+\infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Заметим, что функция $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$ сходится к $J(y)$ при $A \to +\infty$ равномерно относительно $y \in [c,d]$. Значит, знак предела в левой части формулы можно внести под знак внешнего интеграла (по теореме о предельном переходе). В результате приходим к требуемому:

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теорема доказана.

Теорема (о дифференциальном переходе). *Пусть при $x \geq a$, $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Пусть также интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится на промежутке $[c,d]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на этом промежутке. Тогда*

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 \in [c,d]$. Имеем

$$J'(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{J(y_0+k) - J(y_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k) - f(x,y_0)}{k}\,dx.$$

Для доказателства теоремы достаточно только обосновать возможность внесения знака предела в полученной формуле под знак интеграла. Тогда придем к требуемому:

$$J'(y_0) = \int_a^{+\infty} \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}\, dx.$$

Для применения теоремы о предельном переходе надо проверить выполнение двух условий:

1) $\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k} \to \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}$ при $k \to 0$ равномерно относительно $x \in [a, A]$ для любого $A \geq a$;

2) интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\, dx$ равномерно сходится при $k > 0$.

Условие 1) выполняется, исходя из определения частной производной и леммы из первого параграфа данной главы.

Проверим условие 2). Поскольку интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx$ равномерно сходится на промежутке $[c, d]$, то по критерию Коши имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{A}(\varepsilon) \geq a :\ \forall A_1, A_2 \geq \bar{A}\ \Rightarrow\ \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c, d].$$

Положим $\Phi(y) = \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\, dx$. По теореме о дифференциальном переходе для собственных интегралов находим, что

$$\Phi'(y) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

Значит, $|\Phi'(y)| < \varepsilon$ при $y \in [c, d]$.

Тогда

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\, dx \right| = \left| \frac{\Phi(y_0 + k) - \Phi(y_0)}{k} \right| = |\Phi'(y_0 + \theta k)| < \varepsilon.$$

Здесь $\theta \in (0, 1)$. Таким образом, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\, dx$ равномерно сходится при $k > 0$ по критерию Коши. Теорема доказана.

2. Несобственные интегралы 2-ого рода. Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \in [a, b)$, $y \in [c, d]$ и интегрируема при $x \in [a, b - \eta]$, $y \in [c, d]$ для любого $0 < \eta < b - a$. Пусть при $x = b$ и хотя бы при одном значении параметра $y \in [c, d]$ функция $f(x, y)$ терпит бесконечный разрыв второго рода. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{\eta\to +0} F(\eta, y), \tag{2}$$

где

$$F(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)\, dx,$$

называется несобственным интегралом 2-ого рода, зависящим от параметра. Если предел (2) существует и конечен при любом значении параметра $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется сходящимся на отрезке $[c, d]$. Если при этом $F(\eta, y) \to J(y)$ при $\eta \to +0$ равномерно относительно $y \in [c, d]$, то тогда несобственный интеграл $J(y)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[c, d]$.

Таким образом, сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in [c, d],\ \exists \delta(\varepsilon, y) > 0 :\ \forall 0 < \eta < \delta\ \Rightarrow\ |J(y) - F(\eta, y)| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость означает, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0:\ \forall 0 < \eta < \delta\ \Rightarrow\ |J(y) - F(\eta, y)| = \left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [c,d].$$

Для несобственных интегралов 2-ого рода, зависящих от параметра, можно сформулировать теоремы, аналогичные тем, что были сформулированы выше для несобственных интегралов 1-ого рода.

§ Интегралы Лапласа

Рассмотрим несобственные интегралы 1-ого рода

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\,dx, \qquad I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2 + x^2}\,dx,$$

назывемые интегралами Лапласа. Здесь $k > 0$, $a > 0$. Оба интеграла равномерно сходятся по признаку Дирихле.

Зафиксируем параметр k и будем рассматривать интегралы J и I, как функции от a. Тогда

$$\frac{dJ}{da} = -I.$$

Ранее было показано, что

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{ax}\,d(ax) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

Получаем

$$\frac{dJ}{da} + \frac{\pi}{2} = -I + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{x\sin ax}{k^2+x^2} + \frac{\sin ax}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} \frac{k^2 \sin ax}{x(k^2+x^2)}\,dx.$$

Отсюда

$$\frac{d^2J}{da^2} = \int_0^{+\infty} \frac{k^2\cos ax}{k^2+x^2}\,dx = k^2 J.$$

Значит, функция J удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2J}{da^2} - k^2 J = 0.$$

Решая его, находим

$$J = C_1 e^{ak} + C_2 e^{-ak},$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Имеем

$$|J| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k}.$$

Следовательно, $J \to 0$ при $k \to +\infty$, и тогда $C_1 = 0$.

С другой стороны,

$$J \to \int_0^{+\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{\pi}{2k} \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

Таким образом, $C_2 = \frac{\pi}{2k}$.

В результате приходим к выражениям

$$J = \frac{\pi}{2k}e^{-ak}, \qquad I = \frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

Заметим, что при вычислении этих интегралов мы пользовались теоремами о предельном и дифференциальном переходах.

ГЛАВА Интегралы, зависящие от параметра (продолжение)

§ Эйлеровы интегралы

Функция вида

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

называется "Бетта-функцией" или Эйлеровым интегралом 1-ого рода.

Этот интеграл сходится при $a > 0$, $b > 0$ (если $a \geq 1$ и $b \geq 1$, то интеграл будет собственным, в противном случае, возникнет несобственность 2-ого рода в точках $x = 0$ и/или $x = 1$). Заметим, что подынтегральное выражение представляет собой дифференциальный бином. Следовательно, согласно теореме Чебышева, если хотя бы одно из чисел a, b, $a+b$ является целым, то "Бетта-функция" задается "берущимся" интегралом, и ее можно записать в явном виде с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Если ни одно из указанных чисел не целое, то рассматриваемый интеграл — "неберущийся".

Свойства "Бетта-функции":

1) $B(a,b) = B(b,a)$;

2) если $b > 1$, то

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1).$$

Применяя свойства 1) и 2), получаем, что если $b > n$, $a > m$ ($m, n \in \mathbb{N}$), то

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\cdots\frac{b-n}{a+b-n}B(a,b-n),$$

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}\cdots\frac{a-m}{a+b-m}B(a-m,b).$$

Таким образом, без потери общности, "Бетта-функцию" достаточно рассматривать при значениях параметров $a \in (0,1]$, $b \in (0,1]$.

Функция вида

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

называется "Гамма-функцией" или Эйлеровым интегралом 2-ого рода.

Этот интеграл сходится при $a > 0$ (если $a \geq 1$, то имеется только несобственность 1-ого рода, при $a < 1$ возникает еще несобственность 2-ого рода в точке $x = 0$).

Свойства "Гамма-функции":

1) $\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\,\ln^n x\, e^{-x}\,dx$;

2) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ (как следствие, достаточно рассматривать "Гамма-функцию" при $a \in (0,1]$, более того, используя данную рекуррентную формулу, можно доопределить "Гамма-функцию" при $a < 0$);

3) $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, \ldots$;

3) существует $c \in (1,2)$, такое что "Гамма-функция убывает на интервале $(0,c]$ и возрастает на интервале $[c,+\infty)$, при этом $\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a) = +\infty$ и $\lim\limits_{a\to+\infty}\Gamma(a) = +\infty$;

4) $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$;

5) $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ при $a \in (0,1]$ (формула дополнения);

6) $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ при $a > 0$ (формула Лежандра).

§ Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty,+\infty)$. Тогда при определенных условиях ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-l,l]$ ($l=\mathrm{const}>0$):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt,\quad k=0,1,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt,\quad k=1,2,\ldots.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \quad (1)$$

Предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty,+\infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty.$$

Тогда первое слагаемое в (1) будет стремиться к нулю при $l\to+\infty$.

Второе слагаемое в (1) можно формально понимать как сумму Римана для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F(\lambda)\,d\lambda,$$

где

$$F(\lambda)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

В самом деле, разбивая интервал $[0,+\infty)$ на части:

$$0<\frac{\pi}{l}<\frac{2\pi}{l}<\ldots<\frac{k\pi}{l}<\ldots,$$

полагая $\Delta\lambda_k=\frac{\pi}{l}$, и выбирая $\xi_k=\frac{k\pi}{l}$, $k=1,2,\ldots$, получим

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}F(\xi_k)\Delta\lambda_k=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt.$$

Таким образом, переход к пределу при $l\to+\infty$ в формуле (1) приведет к соотношению

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt, \quad (2)$$

называемому представлением функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье. Интеграл Фурье является распространением понятия ряда Фурье на бесконечный интервал.

Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\; d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

Заметим, однако, что формула (2) была получена формальным образом. Она нуждается в обосновании. Присутствующие в ней несобственные интегралы требуют исследования сходимости.

Из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ следует сходимость внутреннего интеграла в (2). Установим достаточные условия сходимости внешнего интеграла (в выбранной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$).

Положим

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t - x_0)\,dt.$$

Исследуем поведение этой функции при $A \to +\infty$. По теореме об интегральном переходе поменяем порядок интегрирования:

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\int_0^{A}\cos\lambda(t - x_0)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x_0)}{t - x_0}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + z)\frac{\sin Az}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(x_0+z) + f(x_0 - z))\,\frac{\sin Az}{z}\,dz.$$

Пришли к интегралу типа Дирихле (см. ряды Фурье).

Лемма 1. *Верно равенство*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin Az}{z}\,dz = 1.$$

Доказательство — см. ранее.

Лемма 2 (Риман). *Пусть функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $[a, +\infty)$. Тогда*

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin pt\,dt = 0, \qquad \lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos pt\,dt = 0.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 или имеет там разрыв 1-ого рода. Обозначим

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Тогда

$$|J(A) - S_0| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |\varphi(z)|\frac{\sin Az}{z}\,dz,$$

где
$$\varphi(z) = f(x_0+z) + f(x_0-z) - 2S_0.$$

Теорема (Дини). *Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty,+\infty)$, а в точке x_0 она непрерывна или терпит там разрыв 1-ого рода. Тогда если существует такое $h>0$, что функция $\varphi(z)/z$ абсолютно интегрируема на промежутке $[0,h]$, то тогда интеграл Фурье (2) сходится к среднему значению S_0.*

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема (Дирихле — Жордан). *Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty,+\infty)$, а в точке x_0 она непрерывна или терпит там разрыв 1-ого рода. Тогда если существует такое $h>0$, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на промежутке $[x_0-h, x_0+h]$, то тогда интеграл Фурье (2) сходится к среднему значению S_0.*

Интеграл Фурье можно переписать в комплексной форме.

Обозначим
$$G_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt, \qquad G_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$
Заметим, что
$$G_1(-\lambda) = -G_1(\lambda), \qquad G_2(-\lambda) = G_2(\lambda).$$
Значит,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)\,d\lambda = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\,d\lambda = 2\int_0^{+\infty} G_2(\lambda)\,d\lambda.$$
Получаем
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)\,d\lambda - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(G_2(\lambda) - iG_1(\lambda)\right)\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,dt.$$
Здесь i — мнимая единица.

Данную формулу можно представить в виде суперпозиции двух формул:
$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$
— преобразование Фурье (образ Фурье), и
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$
— обратное преобразование Фурье (праобраз Фурье).

Преобразование Фурье обладает рядом свойств, позволяющих его активно использовать для решения многих практических задач. В частности, оно активно применяется для решения сложных уравнений (дифференциальных, интегральных, в частных производных, с запаздывающим аргументом, и т.д.).