Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: Физматлит, 2003-2006.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1-3. М.: Дрофа, 2006.

3. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1, 2. М. 2002.

4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1-5. М.: Наука, 2008.

5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1-2. М., 1969. Ч. 3. М., 1970. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1-2. М., 1972.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2005.

www.eqworld.ipmnet.ru/ru/library - книги по математике

ГЛАВА I. КРАТКИЙ ОЧЕРК ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 1. Элементы теории множеств и символика математической логики

Определение. *Множеством называется совокупность элементов какой-либо природы.*

Например: множество чисел, векторов, событий, фигур, и т.д.

Если есть некоторое множество A, то каждый элемент x может либо принадлежать этому множеству ($x \in A$), либо не принадлежать ($x \notin A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым ($\emptyset$). Если элементы множества A можно перечислить $(a, b, c, \ldots)$, то будем писать: $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Множество называется конечным, если число его элементов конечно, в противном случае, оно называется бесконечным. Множество B называется подмножеством множества A ($B \subset A$), если любой элемент множества B принадлежит множеству A. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то тогда множества A и B называются равными ($A = B$), т.е. у равных множеств совокупности элементов совпадают.

Любое математическое предложение в математической логике называется высказыванием. Каждое высказывание может быть истинным или ложным. Например, "$2 + 2 = 4$" — истинное высказывание, "$2 + 2 = 5$" — ложное высказывание. Если есть два высказывания α и β, то из них можно образовать новое высказывание с помощью слов (союзов): "и" ($\&, \wedge$); "или" ($\vee$); "если, то" ($\Rightarrow$); "тогда и только тогда" ($\Leftrightarrow$); "не" ($\bar{\ }, \neg$):

$\alpha \& \beta$ ($\alpha \wedge \beta$) — конъюнкция;

$\alpha \vee \beta$ — дизъюнкция;

$\alpha \Rightarrow \beta$ — импликация с посылкой α и заключением β;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ — эквивалентность;

$\bar{\alpha}$ ($\neg\, \alpha$) — отрицание.

Для этих логических операций справедливы следующие таблицы истинности:

$\alpha \& \beta$	(β) и	(β) л
(α) и	и	л
(α) л	л	л

$\alpha \vee \beta$	(β) и	(β) л
(α) и	и	и
(α) л	и	л

$\alpha \Rightarrow \beta$	(β) и	(β) л
(α) и	и	л
(α) л	и	и

$\alpha \Leftrightarrow \beta$	(β) и	(β) л
(α) и	и	л
(α) л	л	и

α	и	л
$\bar{\alpha}$	л	и

Будем также использовать следующие символы:
$\forall$ — "любой" (квантор общности),
$\exists$ — "существует" (квантор существования).
Пусть E — некторое множество, α — некоторое свойство. Тогда запись

$$\forall x \in E \ \Rightarrow \ \alpha$$

означает: "для любого элемента x из множества E выполнено свойство α". А запись

$$\exists x \in E : \ \alpha$$

означает: "найдется хотя бы один элемент x из множества E, для которого выполнено свойство α".

Пример. Пусть $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда, например, будут истинны следующие высказывания:

$$\forall x \in E \quad \Rightarrow \quad x < 6,$$

$$\exists x \in E : \quad x < 3.$$

Под записью

$$\{x \in E : \quad \alpha\}$$

понимаем совокупность элементов множества E, удовлетворяющих свойству α.

Пример. Пусть $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда

$$\{x \in E : \quad x < 3\} = \{1, 2\}.$$

Если есть два множества A и B, то из них можно построить новое множество с помощью операций:
$\cap$ — пересечение;
$\cup$ — объединение;
$\setminus$ — разность;
$\bar{\ }$— дополнение.
Эти операции определяются следующим образом:

$$A \cap B = \{x : \ (x \in A) \& (x \in B)\},$$

$$A \cup B = \{x : \ (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

$$A \setminus B = \{x : \ (x \in A) \& (x \notin B)\},$$

$$\bar{A} = \{x : \ x \notin A\}.$$

Указанные операции можно применять многократно, например,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Введенные операции обладают определенными свойствами. В частности:
1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

3) $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$,
4) $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,
и т.д.

Докажем для примера свойство 3). Имеем:

$$x \in \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin (\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \notin \bar{A}) \vee (x \notin \bar{B}) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \vee (x \in B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B).$$

Отсюда следует требуемое.

Теорема. *Пусть истинно некоторое соотношение между множествами, имеющее вид равенства или включения, и содержащее операции $\cap$, $\cup$, $\bar{}$. Тогда если в этом соотношении сохранить знак "=", знаки $\subset$ и $\supset$ поменять местами, знаки $\cap$ и $\cup$ поменять местами, а каждое множество заменить на его дополнение, то полученное новое соотношение также будет истинным.*

Пример. Возьмем, например, доказанное выше истинное соотношение 3). Согласно приведенной теореме, соотношение $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ также истинно.

Теорема. *Пусть имеется некоторое высказывание, содержащее кванторы $\forall$ и $\exists$ и некоторое свойство α. Тогда чтобы получить отрицание от этого высказывания, надо кванторы $\forall$ и $\exists$ заменить друг на друга, а свойство α заменить на его отрицание $\neg\alpha$.*

Пример. Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел. Рассмотрим высказывание:

$$\exists x \in \mathbb{N} : \ 2x = 3.$$

Оно, очевидно, ложное. Отрицание от него будет истинным высказыванием. Согласно сформулированной выше теореме, это отрицание можно переписать так:

$$\neg\, (\exists x \in \mathbb{N} : \ 2x = 3) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ 2x \neq 3)\,.$$

В математическом анализе, как и во всей математике, наибольшую значимость имеют множества чисел. Далее последовательно введем следующие числовые множества:

$\mathbb{N}$ — натуральные числа,
$\mathbb{Q}$ — рациональные числа,
$\mathbb{R}$ — вещественные (действительные) числа,
$\mathbb{C}$ — комплексные числа.

Каждое из этих множеств можно вводить независимо от остальных. В то же время, логичнее каждое последующее из этих множеств вводить, как расширение предыдущих: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Такой подход позволяет для каждого очередного множества использовать свойства и операции, уже введенные ранее для предыдущих множеств. При этом очередное множество мы будем обогащать какими-то новыми свойствами и операциями, не присущими предыдущим множествам.

§ 2. Натуральные числа

Под множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ будем понимать совокупность элементов, обозначаемых символами $1, 2, \ldots$, для которых введены операции "=" и "$\neq$" и выполнены следующие аксиомы Пеано:

1) $\exists 1 \in \mathbb{N}$ (как следствие, $\mathbb{N} \neq \emptyset$);

2) для $\forall x \in \mathbb{N}$ существует единственный элемент $\tilde{x} \in \mathbb{N}$, называемый последующим за x;

3) $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{x} \neq 1$ (т.е. 1 — первый элемент);

4) $\forall \tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow x = y$ (т.е. между элементами и их последующими установлено взаимно-однозначное соответствие);

5) Пусть $M \subset \mathbb{N}$, и выполнены условия: а) $1 \in M$, б) $\forall x \in M \Rightarrow \tilde{x} \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

На пятой аксиоме строится известный принцип математической индукции, часто используемый для доказательства различных утверждений.

Пример. Доказать, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедлива формула:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Используем метод математической индукции.

Сначала проверяем, что формула верна при $n = 1$ (база индукции): $1 = 1$.

Предполагаем, что формула верна при $n = m \in \mathbb{N}$ (индуктивное предположение):

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{(1+m)m}{2}.$$

Доказываем, что тогда формула будет верна и при $n = m + 1$:

$$1 + 2 + \ldots + m + (m+1) = (\text{индуктивное предположение}) =$$

$$= \frac{(1+m)m}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Получили требуемое. Значит, согласно принципу математической индукции (пятой аксиоме Пеано), формула будет верна для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Для множества натуральных чисел можно ввести операции отношения: "$>$", "$<$", "$\geq$", "$\leq$", а также арифметические операции "$+$", "$\cdot$". Арифметические операции "$-$" и "$/$" в общем случае для множества $\mathbb{N}$ не определены. В частных случаях они определяются через уже введенные операции "$+$" и "$\cdot$": а) Пусть $x > y$. Тогда $z = x - y$, если $x = y + z$; б) Пусть $x, y \in \mathbb{N}$. Если $\exists z \in \mathbb{N}: \ x = yz$, то тогда $z = x/y$.

Используя аксиомы Пеано и введенные операции, можно вывести все свойства натуральных чисел. Таким образом, считаем, что арифметика натуральных чисел построена.

§ 3. Рациональные числа

Простейшее уравнение $2x = 3$ выводит нас за пределы множества натуральных чисел. Введем рациональные числа.

Под положительной рациональной дробью $\frac{x_1}{x_2}$ будем понимать упорядоченную пару натуральных чисел x_1 и x_2 (число x_1 назовем числителем дроби, а число x_2 — знаменателем).

Две положительные рациональные дроби $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{y_1}{y_2}$ назовем эквивалентными, если $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Положительным рациональным числом назовем совокупность всех положительных рациональных дробей, эквивалентных какой-то одной фиксированной дроби (обычно используют понятие несократимой дроби). Например: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$.

Обозначим через $\mathbb{Q}^+$ — множество положительных рациональных чисел.

Пусть $x \in \mathbb{Q}^+$. Если среди положительных рациональных дробей, составляющих число x, есть дробь со знаменателем 1, то тогда полагаем, что $x \in \mathbb{N}$ (т.е. множество положительных рациональных чисел мы вводим как расширение множества натуральных чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$).

Введем операции отношения для множества $\mathbb{Q}^+$:

1) Два положительных рациональных числа назовем равными друг другу, если они состоят из одних и тех же положительных рациональных дробей;

2) Пусть $x, y \in \mathbb{Q}^+$. Возьмем любую дробь $\frac{x_1}{x_2}$ из совокупности x и любую дробь $\frac{y_1}{y_2}$ из совокупности y. Будем говорить, что $x > y$, если $x_1 y_2 > x_2 y_1$.

Аналогично вводятся операции "$<$", "$\geq$", "$\leq$".

Введем арифметические операции для множества $\mathbb{Q}^+$:

1) Пусть $x, y \in \mathbb{Q}^+$. Возьмем любую дробь $\frac{x_1}{x_2}$ из совокупности x и любую дробь $\frac{y_1}{y_2}$ из совокупности y. Тогда множество положительных рациональных дробей, эквивалентных дроби $\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 y_2}$, называется суммой $x + y$.

2) Пусть $x, y \in \mathbb{Q}^+$. Возьмем любую дробь $\frac{x_1}{x_2}$ из совокупности x и любую дробь $\frac{y_1}{y_2}$ из совокупности y. Тогда множество положительных рациональных дробей, эквивалентных дроби $\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$, называется произведением xy.

Операции "$-$" и "$/$", как это уже отмечалось, вводятся через операции "$+$" и "$\cdot$".

Таким образом, все действия с положительными рациональными числами сводятся к действиям с натуральными числами.

Введем (аксиоматически) понятие нулевого элемента:

$$\exists 0 : \ \forall x \in \mathbb{Q}^+ \ \Rightarrow \ x + 0 = x$$

и противоположного (отрицательного) элемента:

$$\forall x \in \mathbb{Q}^+, \ \exists y : \ x + y = 0.$$

Через $\mathbb{Q}^-$ обозначим множество отрицательных рациональных чисел. Тогда совокупность

$$\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}^-, 0, \mathbb{Q}^+\}$$

— назовем множеством рациональных чисел.

Операции отношения и арифметические операции, введенные ранее для $\mathbb{Q}^+$, можно распространить теперь на все множество $\mathbb{Q}$.

ГЛАВА I. КРАТКИЙ ОЧЕРК ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (продолжение)

§ 3. Рациональные числа (продолжение)

Рассмотрим более детально арифметические операции и операции отношения, введенные ранее для рациональных чисел.

Говорят, что арифметические операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1) Аксиомы сложения:

а) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; x + y = y + x$ (коммутативность),

б) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность),

в) $\exists 0 \in \mathbb{Q} :\; x + 0 = x,\; \forall x \in \mathbb{Q}$ (существование нулевого элемента),

г) $\forall x \in \mathbb{Q},\; \exists y \in \mathbb{Q} :\; x + y = 0$ (существование противоположного элемента).

2) Аксиомы умножения:

а) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; xy = yx$ (коммутативность),

б) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; (xy)z = x(yz)$ (ассоциативность),

в) $\exists 1 \in \mathbb{Q} :\; x \cdot 1 = x,\; \forall x \in \mathbb{Q}$ (существование единичного элемента),

г) $\forall x \neq 0,\; \exists y \in \mathbb{Q} :\; xy = 1$ (существование обратного элемента),

д) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; (x + y)z = xz + yz$ (дистрибутивность).

Слово "аксиомы" здесь условное. Если мы вводим рациональные числа, опираясь на натуральные числа, то тогда часть из этих аксиом, на самом деле являются следствиями из аксиом, введенных для натуральных чисел.

Некоторая совокупность элементов, для которой введены арифметические операции, удовлетворяющие приведенным выше девяти аксиомам, называется полем. В настоящем параграфе мы имеем дело с полем рациональных чисел.

Также говорят, что для рациональных чисел выполнены такие аксиомы (снова слово "аксиомы" понимаем условно, в зависимости от способа введения понятия рационального числа):

3) Аксиома порядка:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; (x > 0) \vee (x = 0) \vee (x < 0),$$

причем

$$\forall x, y > 0 \;\Rightarrow\; (x + y > 0) \& (xy > 0).$$

4) Аксиома плотности:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} :\; x < y \;\Rightarrow\; \exists z \in \mathbb{Q} :\; x < z < y.$$

Отметим некоторые следствия из введенных аксиом:

1) Существует только один нулевой элемент. В самом деле, пусть имеется два нулевых элемента 0_1 и 0_2. Тогда

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Аналогично показывается, что и единичный элемент единственен.

2) Для любого рационального числа существует только один противоположный элемент. В самом деле, пусть для некоторого $x \in \mathbb{Q}$ имеется два противоположных элемента y_1 и y_2. Тогда

$$y_2 = 0 + y_2 = (x + y_1) + y_2 = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1.$$

Аналогично показывается, что для любого ненулевого рационального числа существует только один обратный элемент.

3) Свойство Архимеда:

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > x.$$

Далее, используя введенные аксиомы и операции, можно вывести все свойства рациональных чисел. Считаем, что арифметика рациональных чисел построена.

§ 4. Вещественные числа

Простейшее уравнение $x^2 = 2$ выводит нас за пределы множества рациональных чисел. В самом деле, пусть существует рациональное число $x = \frac{x_1}{x_2}$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, такое что $x^2 = 2$. Без потери общности считаем, что дробь $\frac{x_1}{x_2}$ — несократимая. Тогда $x_1^2 = 2x_2^2$. Значит, число x_1 — четное, т.е. $\exists p \in \mathbb{N}:\ x_1 = 2p$. Но тогда $x_2^2 = 2p^2$, т.е. число x_2 — тоже четное. Но это противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{x_1}{x_2}$.

Введем понятие иррационального числа (по Дедекинду).

Определение. *Разбиение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества A и A' ($\mathbb{Q} = A \cup A'$) называется сечением, если:*

1) любое рациональное число попадает только в одно из множеств A или A',

2) $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \ \Rightarrow\ a < a'$.

Множество A называется нижним классом сечения, а множество A' — верхним классом. Само сечение будем обозначать $A|A'$.

Из введенного определения вытекают следующие свойства:

1) $\forall a \in A,\ \forall a_1 < a \ \Rightarrow\ a_1 \in A$;

2) $\forall a' \in A',\ \forall a_1' > a' \ \Rightarrow\ a_1' \in A'$.

Таким образом, если все рациональные числа расположить на оси в порядке возрастания, то сечение производит деление этой оси на две полуоси (см. рисунок 1).

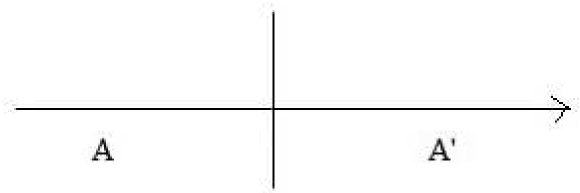

Рис. 1.

Может оказаться ситуация, когда множество A' имеет минимальный элемент, в то время как множество A максимального элемента не имеет. Например, пусть

$$A = \{a \in \mathbb{Q}:\ a < 1\}, \quad A' = \{a' \in \mathbb{Q}:\ a' \geq 1\}.$$

Может оказаться обратная ситуация, когда множество A имеет максимальный элемент, в то время как множество A' минимального элемента не имеет. Например, пусть

$$A = \{a \in \mathbb{Q}:\ a \leq 1\}, \quad A' = \{a' \in \mathbb{Q}:\ a' > 1\}.$$

В обеих этих ситуациях говорят, что сечение производится рациональным числом (называемым пограничным).

Ситуация, когда множество A имеет максимальный элемент, а множество A' имеет минимальный элемент, не возможна. В самом деле, пусть $a_0 = \max A$, $a'_0 = \min A'$. Имеем $a_0 < a'_0$. В силу аксиомы плотности, $\exists c \in \mathbb{Q}: \ a_0 < c < a'_0$. Но тогда $c \notin A$ и $c \notin A'$, а это противоречит определению сечения.

Наконец, осталось рассмотреть ситуацию, когда множество A не имеет максимального элемента, и множество A' не имеет минимального элемента. Такая ситуация возможна. Например, пусть

$$A = \{a \in \mathbb{Q}: \ (a \leq 0) \vee (a^2 < 2)\}, \quad A' = \{a' \in \mathbb{Q}: \ (a' > 0) \& (a'^2 > 2)\}.$$

Здесь пограничного рационального числа не существует. В этом случае говорят, что сечение производится иррациональным числом α (будем писать $\alpha = A|A'$), таким что:

1) $\forall a \in A \ \Rightarrow \ a < \alpha$,

2) $\forall a' \in A' \ \Rightarrow \ a' > \alpha$.

Обозначим через $\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел. Тогда $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ — назовем множеством вещественных чисел. Мы снова получили расширение числового множества: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Введем операции отношения для вещественных чисел. Пусть $\alpha = A|A'$, $\beta = B|B'$. Тогда:

1) $\alpha = \beta \ \Leftrightarrow \ A = B \ \Leftrightarrow \ A' = B'$,

2) $\alpha < \beta \ \Leftrightarrow \ (A \subset B) \& (A \neq B) \ \Leftrightarrow \ (A' \supset B') \& (A' \neq B')$.

Аналогично вводятся операции "$>$", "$\leq$", "$\geq$".

Таким образом, операции отношения для вещественных чисел сводятся к операциям отношения для рациональных чисел.

Лемма 1. *Верно следующее утверждение:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ \alpha < \beta \ \Rightarrow \ \exists r \in \mathbb{Q}: \ \alpha < r < \beta.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = A|A'$, $\beta = B|B'$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то без потери общности будем считать, что $\alpha \in A$. Если $\beta \in \mathbb{Q}$, то без потери общности будем считать, что $\beta \in B'$. Поскольку $\alpha < \beta \ \Leftrightarrow \ (A \subset B) \& (A \neq B)$, то значит, $\exists r \in \mathbb{Q}$: $(r \in B) \& (r \notin A)$. Тогда $(r \in B) \& (r \in A')$ (см. рисунок 2).

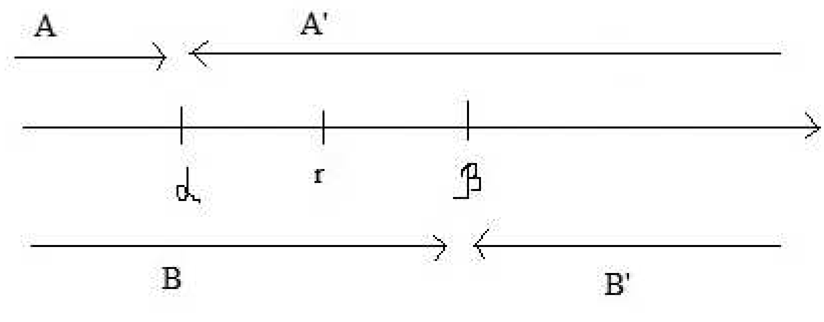

Рис. 2.

Получаем $\alpha < r < \beta$. Лемма доказана.

Аналогично можно доказать, что

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ \alpha < \beta \ \Rightarrow \ \exists \gamma \in \mathbb{I}: \ \alpha < \gamma < \beta.$$

Лемма 2. *Пусть справедливо условие:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow\ \exists s, s' \in \mathbb{Q} : \quad \left\{ \begin{array}{c} s \le \alpha \le s' \quad , \\ s \le \beta \le s' \quad , \\ 0 \le s' - s < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Тогда $\alpha = \beta$.

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть $\alpha \neq \beta$. Предположим для определенности, что $\alpha < \beta$. По лемме 1: $\exists r, r' \in \mathbb{Q} : \ \alpha < r < r' < \beta$. Выберем $\varepsilon = r' - r$. Тогда по условию леммы:

$$\exists s, s' \in \mathbb{Q} : \ \left\{ \begin{array}{c} s \le \alpha < r < r' < \beta \le s', \\ 0 \le s' - s < r' - r \quad . \end{array} \right.$$

Имеем $s' - s < r' - r < s' - s$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Вещественные числа часто бывает удобно представлять в виде десятичных дробей. Пусть $\alpha = A|A'$. Найдем такое целое число c_0, что: $(c_0 \in A)\&(c_0 + 1 \in A')$. Значит,

$$c_0 \le \alpha \le c_0 + 1.$$

Разделим отрезок $[c_0, c_0 + 1]$ на десять равных частей. Пронумеруем эти части: $0, 1, \ldots, 9$. Пусть c_1 — это номер той части, куда попадает число α. Значит,

$$c_0, c_1 \le \alpha \le c_0, c_1 + \frac{1}{10}.$$

Продолжаем этот процесс. На n-ом шаге имеем:

$$c_0, c_1 \ldots c_n \le \alpha \le c_0, c_1 \ldots c_n + \frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Здесь $c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если на каком-то шаге число α совпадет с одним из концов очередного промежутка, то тогда получим представление этого числа в виде конечной десятичной дроби. В противном случае придем к бесконечной десятичной дроби. Учитывая (1) и лемму 2, получаем, что любое вещественное число α представляется десятичной дробью однозначно. Можно доказать, что рациональные числа представляются конечными или периодическими десятичными дробями. Для иррациональных чисел получим бесконечную непериодическую десятичную дробь.

Введем теперь понятие сечения множества вещественных чисел.

Определение. *Разбиение множества вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *на два непустых подмножества* A *и* A' ($\mathbb{R} = A \cup A'$) *называется сечением, если:*

1) любое вещественное число попадает только в одно из множеств A *или* A',

2) $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \ \Rightarrow\ a < a'$.

Снова сечение будем обозначать $A|A'$.

Теорема (Дедекинд) (о полноте множества вещественных чисел) *Для любого вещественного сечения* $A|A'$ *найдется такое вещественное число* α, *которое производит это сечение (т.е. число* α *будет наибольшим элементом множества* A *или наименьшим элементом множества* A'*).*

Доказательство. Пусть $A|A'$ — вещественное сечение. Обозначим $\tilde{A}$ — множество рациональных чисел, содержащихся в A, и $\tilde{A}'$ — множество рациональных чисел, содержащихся в A'. Тогда $\tilde{A}|\tilde{A}'$ — рациональное сечение. Пусть $\alpha = \tilde{A}|\tilde{A}'$.

Поскольку $\alpha \in \mathbb{R}$, то $(\alpha \in A) \vee (\alpha \in A')$. Пусть для определенности $\alpha \in A$ (в противном случае доказательство аналогично). Покажем, что тогда число α является максимальным элементом множества A. Пусть это не так, т.е. $\exists \beta \in A: \ \alpha < \beta$. По лемме 1: $\exists r \in \mathbb{Q}: \ \alpha < r < \beta$. Отсюда, $r \in A$, а значит, $r \in \tilde{A}$. Но это противоречит определению рационального сечения (если $\alpha = \tilde{A}|\tilde{A}'$, то во множестве $\tilde{A}$ не может быть чисел, больших α). Теорема доказана.

Теорема Дедекинда говорит, что вещественные числа полностью (непрерывно) заполняют числовую ось. Повторное применение процедуры Дедекинда построения числовых множеств ничего нового не даст.

ГЛАВА I. КРАТКИЙ ОЧЕРК ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (продолжение)

§ 4. Вещественные числа (продолжение)

Определение. *а) Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если:*

$$\exists z \in \mathbb{R}: \; x \leq z, \; \forall x \in M,$$

число z в этом случае называется верхней гранью множества M;

б) Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если:

$$\exists z \in \mathbb{R}: \; x \geq z, \; \forall x \in M,$$

число z в этом случае называется нижней гранью множества M;

в) Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение. *а) Пусть множество $M \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Наименьшая из всех верхних граней этого множества называется точной верхней гранью* ($\sup M$)*;*

б) Пусть множество $M \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу. Наибольшая из всех нижних граней этого множества называется точной нижней гранью ($\inf M$)*.*

Данное определение можно переписать в следующем виде:

Определение. *а) Число z называется точной верхней гранью множества M* ($z = \sup M$)*, если:*

1. $\forall x \in M \;\Rightarrow\; x \leq z$,

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M \;\Rightarrow\; x > z - \varepsilon$;

б) Число z называется точной нижней гранью множества M ($z = \inf M$)*, если:*

1. $\forall x \in M \;\Rightarrow\; x \geq z$,

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M \;\Rightarrow\; x < z + \varepsilon$.

Пример. Пусть $M = [1, 2)$. Тогда:

$$\inf M = \min M = 1, \quad \sup M = 2, \quad \nexists \max M.$$

Теорема (о верхней и нижней гранях). *Если множество M ограничено сверху (снизу), то у него существует точная верхняя (нижняя) грань.*

Доказательство. Докажем для верхней грани (для нижней все аналогично). Если $\exists z = \max M$, то очевидно, $z = \sup M$. Предположим теперь, что $\nexists \max M$. Пусть A' — множество всех верхних граней множества M, а A — множество всех чисел, не являющихся верхними гранями множества M. Тогда $A|A'$ — вещественное сечение, причем $M \subset A$ (т.к. ни один из элементов множества M не является максимальным элементом). По теореме Дедекинда: $\exists z \in \mathbb{R}: \; z = A|A'$. Отсюда имеем, что $z = \sup M$. Теорема доказана.

Следствие. *а) Пусть $\forall x \in M \;\Rightarrow\; x < a$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда* $\sup M \leq a$*;*

б) Пусть $\forall x \in M \;\Rightarrow\; x > a$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\inf M \geq a$*.*

Замечание. а) Если множество M не ограничено сверху, то положим $\sup M = +\infty$; б) Если множество M не ограничено снизу, то положим $\inf M = -\infty$.

Таким образом, супремум и инфинум, в отличие от максимума и минимума, существуют всегда у любого множества.

Введем теперь арифметические операции для вещественных чисел.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольные $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, такие что

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b'. \tag{2}$$

Тогда под суммой $\alpha + \beta$ будем понимать такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что

$$a + b < \gamma < a' + b'$$

при любых a, a', b, b', удовлетворяющих условиям (2).

Для $\forall \varepsilon > 0$ числа a, a', b, b' можно выбрать так, что

$$a' - a < \varepsilon, \quad b' - b < \varepsilon. \tag{3}$$

Тогда получим

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2\varepsilon.$$

Значит, по лемме 2 число γ будет определяться однозначно.

Введенное правило сложения можно записать следующим образом:

$$\gamma = \alpha + \beta = \sup_{(2)}(a + b) = \inf_{(2)}(a' + b').$$

Аналогично вводится операция умножения. Рассмотрим сначала положительные числа α и β. Тогда под произведением $\alpha\beta$ будем понимать такое $\delta \in \mathbb{R}$, что

$$ab < \delta < a'b'$$

при любых a, a', b, b', удовлетворяющих условиям (2), или, что тоже самое,

$$\delta = \alpha\beta = \sup_{(2)}(ab) = \inf_{(2)}(a'b').$$

Снова лемма 2 гарантирует однозначность такого определения умножения.

Для знакопроизвольных чисел α, β воспользуемся правилами:

а) $\alpha \cdot 0 = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

б) $\forall \alpha, \beta \neq 0 \ \Rightarrow \ \alpha\beta = \pm|\alpha| \cdot |\beta|$, где используется "$+$", если числа α, β одного знака, и "$-$", если разного.

Таким образом, арифметические операции с вещественными числами сводятся к операциям с рациональными числами.

Нетрудно проверить, что при таком способе введения арифметических операций множество вещественных чисел будет образовывать поле.

Покажем, например, что выполнена аксиома о нулевом элементе:

$$\alpha + 0 = \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

В самом деле, рассмотрим произвольные $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, такие что

$$a < \alpha < a', \quad b < 0 < b'.$$

Тогда

$$a + b < \alpha + 0 < a' + b'.$$

С другой стороны имеем

$$a + b < a < \alpha < a' < a' + b'.$$

Значит, числа α и $\alpha + 0$ можно поместить в одну и ту же сколь угодно малую вилку. Следовательно, по лемме 2 эти два числа равны. Получили требуемое.

Или, например, проверим аксиому об ассоциативности умножения:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Выбираем произвольные $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{Q}$, такие что

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b', \quad c < \gamma < c'.$$

Тогда

$$ab < \alpha\beta < a'b', \quad (ab)c < (\alpha\beta)\gamma < (a'b')c',$$

а также

$$bc < \beta\gamma < b'c', \quad a(bc) < \alpha(\beta\gamma) < a'(b'c').$$

Из ассоциативности умножения рациональных чисел получаем, что

$$(ab)c = a(bc), \quad (a'b')c' = a'(b'c'),$$

т.е. снова пришли к тому, что числа $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$ можно поместить в одну и ту же сколь угодно малую вилку. Опять по лемме 2 находим требуемое.

Остальные аксиомы поля вещественных чисел проверяются аналогичным образом.

Введем понятия степени, корня и логарифма.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, причем $\alpha > 0$. Тогда $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$, где $n \in \mathbb{N}$, если

$$\alpha = \xi^n = \xi \cdot \ldots \cdot \xi.$$

Аналогично $\xi = \alpha^{m/n}$, где $n, m \in \mathbb{N}$, если

$$\alpha^m = \xi^n.$$

Введем теперь число $\xi = \alpha^\beta$, где $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha > 1$. Выберем произвольные $b, b' \in \mathbb{Q}$, такие что

$$b < \beta < b'. \tag{4}$$

Тогда ξ определим как число, лежащее во всевозможных вилках вида

$$\alpha^b < \xi < \alpha^{b'},$$

или, что то же самое,

$$\xi = \alpha^\beta = \sup_{(4)} \alpha^b = \inf_{(4)} \alpha^{b'}.$$

Если $\alpha = 1$, то положим $\xi = \alpha^\beta = 1$. Для $0 < \alpha < 1$ положим $\alpha^\beta = (1/\alpha)^{-\beta}$.

Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Тогда если $\xi = \alpha^\beta$, то $\beta = \log_\alpha \xi$.

Отсюда можно вывести все известные свойства степеней, корней и логарифмов.

Далее в этом параграфе приведем некоторые вспомогательные понятия и утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма (Коши — Кантор) *Любая система вложенных последовательно друг в друга замкнутых отрезков имеет хотя бы одну общую точку. Если же для $\forall \varepsilon > 0$ в этой системе найдется отрезок, длина которого меньше, чем ε, то тогда у указанной системы отрезков будет ровно одна общая точка.*

Доказательство. Обозначим отрезки: $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Здесь $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Вложенность отрезков означает, что

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1.$$

Значит, $a_n \le b_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим множества:

$$A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{b_m,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Множество A ограничено сверху (любым числом b_m), а множество B ограничено снизу (любым числом a_n). Положим

$$a = \sup A, \quad b = \inf B.$$

По теореме о верхней и нижней гранях числа a и b существуют и конечны. Тогда

$$a \le b_m, \quad a_n \le b, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$a \le b.$$

Получаем, что любая точка $c \in [a, b]$ будет являться общей точкой заданной системы отрезков:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le a \le c \le b \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1.$$

Пусть теперь для $\forall \varepsilon > 0$ в системе отрезков можно выбрать такой отрезок, длина которого меньше, чем ε. Предположим от противного, что у этой системы отрезков есть две общие точки c_1 и c_2. Пусть для определенности $c_1 < c_2$, т.е.

$$a_n \le c_1 < c_2 \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Выбирая $\varepsilon = c_2 - c_1 > 0$, придем к противоречию (длины всех отрезков в этой системе должны быть больше, чем выбранное ε). Лемма доказана.

Замечание. Для системы вложенных открытых интервалов лемма Коши — Кантора, вообще говоря, не верна. В самом деле, рассмотрим, например, систему:

$$(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset (0, \frac{1}{3}) \supset \ldots \supset (0, \frac{1}{n}) \supset \ldots.$$

В этом случае имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$. Действительно, предположим, что $\exists c \in (0, \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $0 < c < \frac{1}{n}$, откуда получаем $n < \frac{1}{c}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, что противоречит неограниченности множества натуральных чисел (свойству Архимеда).

Определение. *Пусть $S = \{X\}$ — некоторая система множеств X. Говорят, что эта система покрывает множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{X \in S} X$.*

Лемма (Борэль — Лебег). *Из любой системы открытых интервалов, покрывающей заданный отрезок, всегда можно выделить конечную подсистему, которая также будет покрывать этот отрезок.*

Доказательство. Пусть задан отрезок $I_1 = [a, b]$, и пусть имеется бесконечная система интервалов $S = \{X\}$, покрывающая этот отрезок. Доказываем от противного, предположим, что нельзя из системы S выбрать конечное покрытие отрезка I_1. Поделим отрезок I_1 пополам. Хотя бы одна из полученных половинок отрезка не будет иметь конечного покрытия, выбранного из системы интервалов S (если бы обе половинки покрывались конечным числом интервалов, то тогда и весь отрезок также покрывался бы конечным числом интервалов). Обозначим через I_2 ту из половинок, которая не имеет конечного покрытия (если обе половинки не имеют конечного покрытия, то выбираем любую из них). Снова делим I_2 пополам, и т.д. В результате получаем систему вложенных друг в друга отрезков

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots,$$

причем для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что длина отрезка I_n (равная $(b-a)/2^{n-1}$) будет меньше, чем ε. Значит, по лемме Коши — Кантора у данной системы есть ровно одна общая точка $c = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$. Поскольку система интервалов S покрывает весь отрезок I_1, то следовательно, найдется такой интервал $(\alpha, \beta) \in S$, что $c \in (\alpha, \beta)$. Выберем $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\} > 0$. По построению найдется такой отрезок I_n, содержащий точку c и имеющий длину, меньшую, чем выбранное ε. Но тогда $I_n \subset (\alpha, \beta)$, т.е. отрезок I_n имеет конечное покрытие (он покрывается одним интервалом из системы S). Но это противоречит тому, что на каждом шаге мы выбирали половинки, не имеющие конечного покрытия. Лемма доказана.

ГЛАВА I. КРАТКИЙ ОЧЕРК ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (продолжение)

§ 4. Вещественные числа (продолжение)

Определение. *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда интервал*

$$U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$

называется δ-окрестностью точки a. Здесь $\delta = const > 0$.

Замечание. Можно ввести понятие δ-окрестности и для $a = \pm\infty$. Положим

$$U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty), \quad U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta).$$

Определение. *Точка a называется внутренней точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если*

$$\exists \delta > 0 : \ U_\delta(a) \subset M.$$

Пример. Пусть $M = [1, 2)$. Тогда открытый интервал $(1, 2)$ будет представлять собой совокупность внутренних точек множества M.

Определение. *Точка a называется предельной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall \delta > 0, \ \exists x \in M : \ (x \neq a)\&(x \in U_\delta(a)).$$

Замечание. Определение предельной точки множества можно переформулировать по-другому: точка a называется предельной точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечное число точек из M. Отметим, что сама точка a может как принадлежать множеству M, так и не принадлежать.

Пример. Пусть $M = [1, 2)$. Тогда замкнутый отрезок $[1, 2]$ будет представлять собой совокупность предельных точек множества M.

Лемма (Больцано — Вейерштрасс). *Любое бесконечное ограниченное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, причем M — ограниченное множество и имеет бесконечное число элементов. Из ограниченности следует, что $\exists a, b \in \mathbb{R} : \ M \subset [a, b]$. Покажем, что хотя бы одна из точек отрезка $I = [a, b]$ является предельной точкой множества M. Пусть это не так. Тогда для $\forall x \in I$ найдется такая окрестность $U_\delta(x)$, в которой содержится не более чем конечное число точек из M. Совокупность этих окрестностей $\{U_\delta(x)\}$ при всех $x \in I$ образует покрытие отрезка I, а значит, и множества M. По лемме Борэля — Лебега выбираем из нее конечное покрытие. Поскольку выбранное покрытие состоит из конечного числа окрестностей, содержащих конечное число точек множества M, то следовательно, множество M обязано быть конечным. Полученное противоречие доказывает лемму.

Конечные множества можно сравнивать между собой по числу элементов. Возникает вопрос: можно ли сравнивать бесконечные множества?

Определение. *Множества A и B называются эквивалентными или равномощными ($A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.*

Определение. *Говорят, что множество A мощнее множества B, если: $\exists C \subset A : \ C \sim B$, но при этом $\nexists D \subset B : \ D \sim A$.*

Самыми простыми в плане мощности являются конечные множества. Более сложными являются счетные множества.

Определение. *Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$, т.е. если каждому элементу множества A можно присвоить свой индивидуальный натуральный номер (элементы можно пересчитать).*

Пример. Пусть $A = \{2, 4, \ldots\}$ — множество четных натуральных чисел. Имеем $A \subset \mathbb{N}$, но при этом $A \sim \mathbb{N}$, т.е. A — счетное. В самом деле, $\forall n \in \mathbb{N} \;\leftrightarrow\; (2n) \in A$.

Теорема. *Если A и B — счетные множества, то тогда множество $C = A \cup B$ также будет счетным.*

Доказательство. Пусть

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

Тогда

$$C = A \cup B = \{c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots\},$$

где можно положить $c_1 = a_1$, $c_2 = b_1$, $c_3 = a_2$, $c_4 = b_2$, ... (если у множеств A и B есть одинаковые элементы, то считаем их один раз). Значит, C — счетное множество. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать более общую теорему:

Теорема. *Если A_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — счетные множества, то тогда множество $C = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ также будет счетным.*

Теорема. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счетным.*

Доказательство. Все элементы множества положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$ можно записать в бесконечной таблице

знам.|числ.	1	2	3	...
1	1/1	2/1	3/1	...
2	1/2	2/2	3/2	...
3	1/3	2/3	3/3	...
...	...	...	...	...

У этой таблицы счетное число строк и столбцов, а значит, по предыдущей теореме и число элементов также будет счетно.

Аналогично получаем, что и множество отрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}^-$ также счетное. Следовательно и все множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}^-, 0, \mathbb{Q}^+\}$ счетно. Теорема доказана.

Бывают ли несчетные множества?

Теорема (Кантор). *Множество вещественных чисел на любом отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ — несчетно.*

Доказательство. Доказываем от противного, пусть все вещественные числа на отрезке $[a, b]$ можно перенумеровать:

$$[a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Построим отрезок $[a_1, b_1] \subset [a, b] :\; (a_1 < b_1)\&(x_1 \notin [a_1, b_1])$. Затем строим $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] :\; (a_2 < b_2)\&(x_2 \notin [a_2, b_2])$, и т.д. В результате получаем систему вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots,$$

которая по лемме Коши — Кантора имеет непустое пересечение, т.е.

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n].$$

Имеем $c \in [a,b]$, но при этом по построению $c \neq x_1, x_2, \ldots$. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

Определение. *Говорят, что множество вещественных чисел на любом невырожденном отрезке $[a,b]$ имеет мощность континуума.*

Следствие. *Множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. Пусть $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x-a}{b-a}\pi\right)$. Тогда

$$x \in [a,b] \;\Leftrightarrow\; y \in (-\infty, +\infty).$$

Значит, $\mathbb{R} \sim [a,b]$. Следствие доказано.

Бывают ли множества с мощностью, большей чем мощность континуума?

Теорема. *Пусть A — некоторое множество, а B — множество всех подмножеств из A. Тогда B мощнее, чем A.*

Замечание. Из данной теоремы следует, что не существует множества с наибольшей возможной мощностью (всегда можно построить еще более мощное множество). Например, если множество A имеет мощность континуума, а B — множество всех подмножеств из A, то говорят, что множество B имеет мощность гиперконтинуума.

§ 5. Комплексные числа

Простейшее уравнение $x^2 + 1 = 0$ выводит нас за пределы множества вещественных чисел. Введем понятие комплексного числа.

Определение. *Комплексным числом назовем упорядоченную пару вещественных чисел (a,b).*

Обозначим через $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Пусть $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. Тогда $a = \operatorname{Re} z$ назовем вещественной частью комплексного числа z, а $b = \operatorname{Im} z$ — мнимой частью. Если $b = 0$, то будем считать, что $z = (a,0) = a \in \mathbb{R}$. Таким образом, по построению получаем, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Введем операции с комплексными числами.

1) Два комплексных числа $x = (a,b)$ и $y = (c,d)$ назовем равными ($x = y$), если $a = c$ и $b = d$.

Операции отношения "$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$" для комплексных чисел не определяются, т.е. множество $\mathbb{C}$ — не упорядоченное.

2) Пусть $x = (a,b)$ и $y = (c,d)$. Тогда положим

$$x + y = (a + c, b + d), \qquad xy = (ac - bd, ad + bc).$$

В результате, все действия с комплексными числами сводятся к действиям с вещественными числами.

Введенные для комплексных чисел арифметические операции удовлетворяют всем аксиомам поля (получаем поле комплексных чисел). Здесь $\varepsilon_0 = (0,0)$ — нулевой элемент в $\mathbb{C}$ ($z + \varepsilon_0 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$); $\varepsilon_1 = (1,0)$ — единичный элемент в $\mathbb{C}$ ($z\varepsilon_1 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$).

Проверим, например, коммутативность сложения:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c,d) + (a,b).$$

Остальные аксиомы поля комплексных чисел проверяются аналогично (они вытекают из соответствующих аксиом поля вещественных чисел).

Если вещественные числа удобно располагать вдоль оси, то комплексные числа будем располагать на плоскости.

Пусть $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа z, а число $\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} b/a$ — аргументом комплексного числа z (см. рисунок 1).

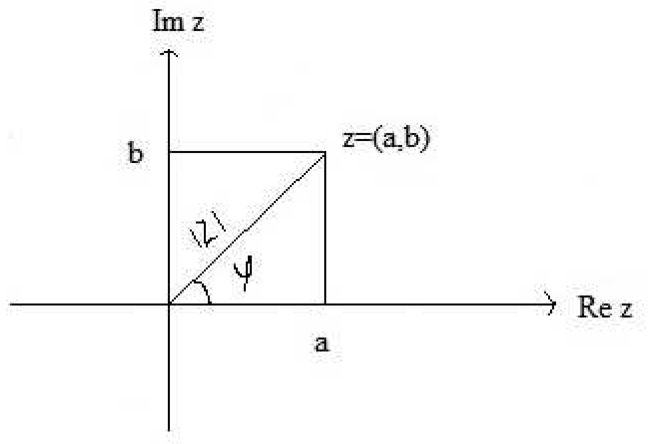

Рис. 1.

Комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z = (a, b) = (|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi).$$

Рассмотрим комплексное число $i = (0, 1)$ (называемое мнимой единицей). Имеем

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Тогда комплексное число $z = (a, b)$ может быть записано в виде:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$$

Пусть $z = a + ib$. Тогда число $\bar{z} = a - ib$ называется сопряженным к числу z.
Верны свойства:
1) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$,
2) $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$,
3) $\bar{z}\,z = |z|^2$,
4) $\bar{z} + z = 2\operatorname{Re} z$.
Далее можно вывести все свойства комплексных чисел.

ГЛАВА II. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Понятие последовательности и предела

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое вещественное (или комплексное) число a_n. Тогда говорят, что задана числовая (вещественная или комплексная) последовательность: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Число a_n называется элементом последовательности, а n — номером элемента.

Таким образом, числовая последовательность — это счетный набор чисел, расположенный в порядке возрастания их номеров. Отметим, что нумерация элементов может вестись не обязательно, начиная с номера 1 (в любом случае элементы всегда можно перенумеровать).

Пример. Рассмотрим некоторые последовательности:

1) Последовательность натуральных чисел: $1, 2, 3, \ldots$ (здесь $a_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$);

2) Последовательность четных натуральных чисел: $2, 4, 6, \ldots$ (здесь $a_n = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$);

3) Последовательность степеней мнимой единицы i: $i, -1, -i, 1, i, \ldots$ (здесь $a_n = i^n$, $n = 1, 2, \ldots$); и т.п.

Далее, если не оговорено противное, будем рассматривать вещественные последовательности (о комплексных последовательностях поговорим отдельно).

Последовательность может задаваться следующими стандартными способами:

1) По явной формуле $a_n = f(n)$ (задано явное выражение для нахождения элемента последовательности по его номеру).

Например, а) арифметическая прогрессия: $a_n = c + nd$, где c, d — некоторые заданные константы, $n = 0, 1, 2, \ldots$; б) геометрическая прогрессия: $a_n = cd^n$, где c, d — некоторые заданные константы, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2) По рекуррентной формуле $a_n = f(a_1, \ldots, a_{n-1})$ (каждый последующий элемент последовательности выражается через предыдущие).

Например, пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $n = 3, 4, \ldots$. Получим известную последовательность чисел Фибоначи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

3) По какому-то правилу или алгоритму.

Например, $1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ — последовательность простых натуральных чисел.

Определение. *Вещественная последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется:*

1) неубывающей, если $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$*;*

2) строго возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$*;*

3) невозрастающей, если $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$*;*

4) строго убывающей, если $a_n > a_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Во всех четырех случаях последовательность называется монотонной.

Определение. *Вещественная последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется:*

1) ограниченной сверху, если $\exists M = const:\ a_n \le M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$*;*

2) ограниченной снизу, если $\exists m = const:\ a_n \ge m$, $\forall n = 1, 2, \ldots$*;*

3) ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\exists m, M = const:$ $m \le a_n \le M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ *(или можно записать:* $|a_n| \le P$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, *где* $P = \max\{|m|, |M|\}$*).*

Введем теперь понятие предела последовательности.

Определение. *Число* g *называется пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *при* $n \to +\infty$, *если:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge K\ \Rightarrow\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

В этом случае будем писать:

$$g = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Заметим, что

$$|a_n - g| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a_n \in U_\varepsilon(g),$$

т.е., начиная с некоторого номера K, все элементы последовательности попадают в ε-окрестность числа g и более из нее не выходят (см. рисунок 1). Номер K зависит от выбора числа ε.

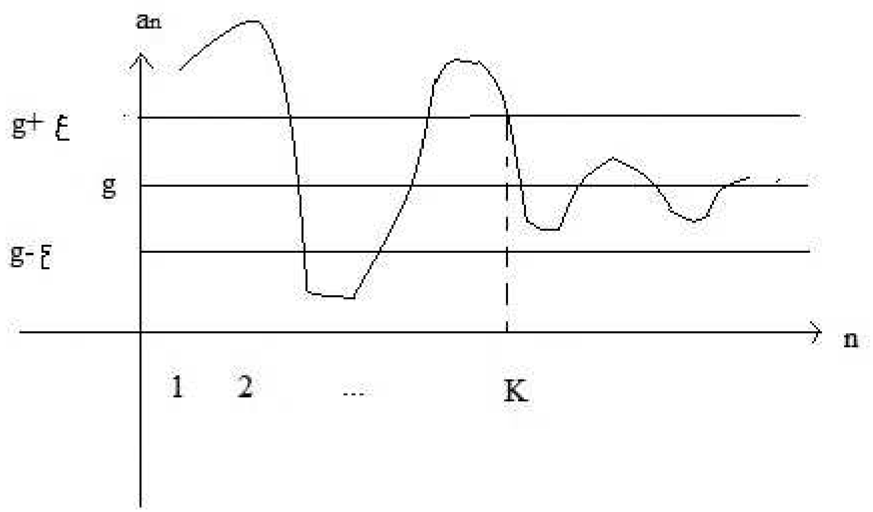

Рис. 1.

Последовательность может иметь предел, а может и не иметь. В первом случае она называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

Пример. Пусть $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажем, что в этом случае

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ рассмотрим неравенство

$$|a_n - 1| < \varepsilon \;\;\Leftrightarrow\; |\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |\frac{1}{n}| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > 1/\varepsilon.$$

Значит, в определении предела достаточно выбрать $K = [1/\varepsilon] + 1$ (здесь $[..]$ — целая часть числа). Получили требуемое.

Замечание. Можно написать определение того, что $g \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$:

$$\exists\varepsilon > 0,\; \forall K \in \mathbb{N}:\; \exists n \geq K \;\Rightarrow\; |a_n - g| \geq \varepsilon.$$

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, например, что $1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Выберем $\forall K \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное нечетное $n \geq K$. Тогда получим $|a_n - 1| = |(-1)^n - 1| = |-1-1| = 2 \geq \varepsilon$. Получили требуемое. Можно показать, что в данном случае $\nexists g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, т.е. рассматриваемая последовательность — расходящаяся.

Теорема (о единственности предела). *Если предел у последовательности существует, то он единственен.*

Доказательство. От противного, пусть

$$g_1 = \lim_{n\to+\infty} a_n, \quad g_2 = \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

причем $g_1 \neq g_2$. Выберем $\varepsilon = |g_1 - g_2|/2$. Тогда из определения предела следует, что

$$\exists K_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq K_1 \ \Rightarrow \ |a_n - g_1| < \varepsilon,$$

и

$$\exists K_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq K_2 \ \Rightarrow \ |a_n - g_2| < \varepsilon.$$

Положим $K = \max\{K_1;\, K_2\}$. Тогда при $n \geq K$ получим

$$2\varepsilon = |g_1 - g_2| = |(g_1 - a_n) + (a_n - g_2)| \leq |a_n - g_1| + |a_n - g_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности). *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Выберем $\varepsilon = 1$. Тогда из определения предела получим

$$\exists K \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq K \ \Rightarrow \ |a_n - g| < 1.$$

Значит, $g - 1 < a_n < g + 1$, $\forall n \geq K$. Обозначим

$$m = \min\{|a_1|;\, \ldots;\, |a_{K-1}|;\, g-1\}, \quad M = \max\{|a_1|;\, \ldots;\, |a_{K-1}|;\, g+1\}.$$

Тогда $m \leq a_n \leq M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Замечание. Обратная теорема, вообще говоря, не верна. Ограниченная последовательность может быть расходящейся (например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$).

§ 2. Свойства предела последовательности

Теорема. *Если у последовательности изменить (добавить, убрать, поменять) конечное число элементов, то это никак не повлияет ни на сходимость последовательности, ни на значение ее предела.*

Теорема. *Пусть $a_n = C = const$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = C$.*

Теорема (арифметические свойства предела). *Пусть*

$$\exists\ g = \lim_{n\to+\infty} a_n, \qquad \exists\ h = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Тогда:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = g + h,$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = g - h,$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = gh,$

4) а если $h \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n/b_n) = g/h.$

Доказательство. 1) Доказываем для суммы. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq K \ \Rightarrow \ (|a_n - g| < \varepsilon)\&(|b_n - h| < \varepsilon).$$

Тогда при $n \geq K$ получим

$$|(a_n + b_n) - (g + h)| \leq |a_n - g| + |b_n - h| < 2\varepsilon.$$

Обозначая 2ε за новое ε, приходим к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = g + h$.

2) Для разности доказательство аналогично.

3) Докажем для произведения. Снова

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ (|a_n - g| < \varepsilon)\&(|b_n - h| < \varepsilon).$$

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится, а значит, она ограничена, т.е.

$$\exists M \geq 0:\ |a_n| \leq M,\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда при $n \geq K$ получим

$$|(a_nb_n) - (gh)| = |a_nb_n - a_nh + a_nh - gh| = |a_n(b_n - h) + h(a_n - g)| \leq$$

$$\leq |a_n|\,|b_n - h| + |h|\,|a_n - g| < \varepsilon(M + |h|).$$

Обозначая $\varepsilon(M + |h|)$ за новое ε, приходим к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n) = gh$.

4) Докажем теперь для отношения. Для начала покажем, что если $h \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/b_n) = 1/h$. Выберем $\varepsilon_1 = |h|/2$. Тогда

$$\exists K_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K_1\ \Rightarrow\ |b_n - h| < \varepsilon_1.$$

Отсюда при $n \geq K_1$ получим

$$|h| - |b_n| \leq |b_n - h| < |h|/2,$$

и следовательно, $|b_n| > |h|/2$.

Выберем теперь $\forall\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists K_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K_2\ \Rightarrow\ |b_n - h| < \varepsilon.$$

Пусть $K = \max\{K_1;\, K_2\}$. При $n \geq K$ имеем

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \frac{|b_n - h|}{|b_n|\,|h|} < \frac{2\varepsilon}{|h|^2}.$$

Обозначая $2\varepsilon/|h|^2$ за новое ε, приходим к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/b_n) = 1/h$.

Наконец, с учетом уже доказанного пункта 3) теоремы, получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}a_n\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{g}{h}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если пределы $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ не существуют, то пользоваться арифметическими свойствами нельзя. Пусть, например, $a_n = 1 - \sin n$, $b_n = \sin n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = 1$. В то же время, попытка разбить этот предел на сумму пределов $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n + \lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ ни к чему хорошему не приведет, поскольку эти пределы не существуют.

ГЛАВА II. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (продолжение)

§ 2. Свойства предела последовательности (продолжение)

Теорема. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$, *то тогда*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |g|.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Отсюда при $n \geq K$ имеем

$$\begin{cases} |a_n| - |g| \leq |a_n - g| < \varepsilon, \\ |g| - |a_n| \leq |a_n - g| < \varepsilon. \end{cases}$$

Значит,

$$|g| - \varepsilon < |a_n| < |g| + \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Тогда

$$\big||a_n| - |g|\big| < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Теорема доказана.

Замечание. Обратная теорема, вообще говоря, не верна. Из существования предела $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|$ может не следовать существование предела $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Например, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} |(-1)^n| = 1$, но $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$.

Теорема. *Пусть* $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$. *Тогда* $g \geq 0$.

Доказательство. От противного, пусть $g < 0$. Выберем $\varepsilon = -g$. По определению предела получаем

$$\exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ |a_n - g| < -g.$$

Тогда

$$a_n - g \leq |a_n - g| < -g, \quad \forall n \geq K.$$

Следовательно,

$$a_n < 0, \quad \forall n \geq K.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $a_n \geq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = h$. *Тогда* $g \geq h$.

Доказательство. Имеем $(a_n - b_n) \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда по предыдущей теореме, с учетом арифметических свойств предела, получаем

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = g - h.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $a_n > b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = h$, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что $g > h$. Можно гарантировать лишь нестрогое неравенство $g \geq h$. Например, пусть $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{1}{n} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Теорема (о двух "милиционерах"). *Пусть* $a_n \geq c_n \geq b_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = g.$$

Тогда $\exists \lim_{n\to+\infty} c_n = g$.

Доказательство. Согласно определению предела, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq K \ \Rightarrow \ (|a_n - g| < \varepsilon)\&(|b_n - g| < \varepsilon).$$

Тогда

$$-\varepsilon < b_n - g \leq c_n - g \leq a_n - g < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Следовательно,

$$|c_n - g| < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы — см. рисунок 1.

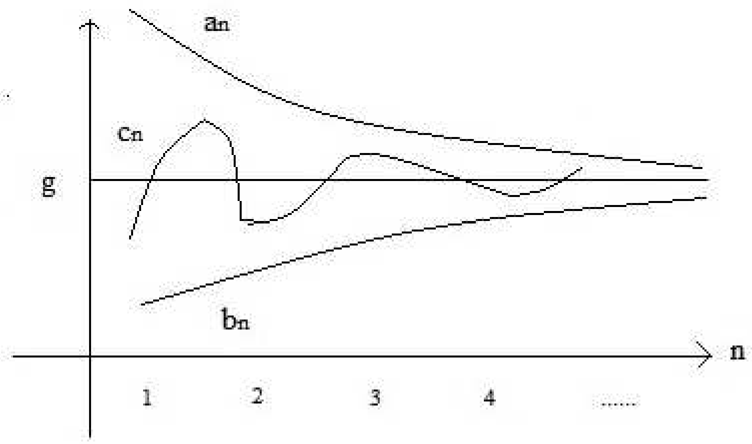

Рис. 1.

Теорема. *Если* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, *то* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Имеем

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда требуемое следует по теореме о двух "милиционерах". Теорема доказана.

Теорема. *Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.*

Доказательство. Докажем теорему для возрастающей последовательности (для убывающей все аналогично). Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$.

Положим $g = \sup_{n=1,2,\ldots} a_n$ (по теореме о верхней грани эта величина существует и конечна). Из определения супремума имеем:

1) $a_n \leq g, \ \forall n = 1, 2, \ldots;$

2) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \in \mathbb{N}: \ a_K > g - \varepsilon$.

В силу монотонного возрастания последовательности, получаем $a_n \geq a_K$, $\forall n \geq K$. Тогда

$$g - \varepsilon < a_K \leq a_n \leq g < g + \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Значит, $g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы — см. рисунок 2.

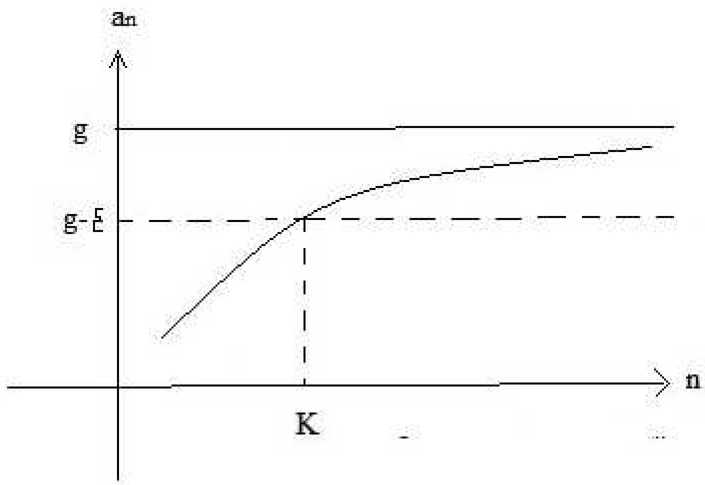

Рис. 2.

Теорема. *Последовательность* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что эта последовательность монотонно возрастает. Имеем (бином Ньютона):

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!},$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} 1^{n+1-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!},$$

Во втором выражении каждое слагаемое, начиная с третьего, больше соответствующего слагаемого из первого выражения. Кроме того, во втором выражении на одно положительное слагаемое больше. Таким образом, $a_{n+1} > a_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что последовательность ограничена сверху:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

Тогда по предыдущей теореме $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Теорема доказана.

Определение. Обозначим

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

— число "e".

Можно показать, что "e" — иррациональное число, $e = 2,718281\ldots$.

Пример. Найдем предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=e^{-1}.$$

§ 3. Подпоследовательности

Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $(m_1 < m_2 < \ldots)$. Тогда последовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ газывается подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Таким образом, подпоследовательность получается путем выкидывания из последовательности какого-то конечного или бесконечного числа элементов (но так, чтобы осталось бесконечное число элементов).

У любой последовательности существует бесконечное число подпоследовательностей. Например,

$$a_2, a_4, a_6, \ldots,$$

или

$$a_1, a_3, a_5, \ldots,$$

или

$$a_1, a_2, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots,$$

и т.д. Вся последовательность также является подпоследовательностью самой себя.

У элементов подпоследовательности индексы по-прежнему должны располагаться в порядке возрастания. Например, конструкция

$$a_2, a_1, a_4, a_3, \ldots$$

подпоследовательностью не является.

Лемма. *Пусть $\{m_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда $m_n \geq n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Имеем:

$$m_1 \geq 1,$$

$$m_2 > m_1 \geq 1 \;\Rightarrow\; m_2 \geq 2,$$

и т.д. Тогда по методу математической индукции получаем требуемое. Лемма доказана.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится, то любая ее подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ будет сходиться к тому же самому пределу.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \;\Rightarrow\; |a_n - g| < \varepsilon.$$

Отсюда, с учетом леммы, имеем

$$|a_{m_n} - g| < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{m_n} = g$. Теорема доказана.

ГЛАВА II. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (продолжение)

§ 3. Подпоследовательности (продолжение)

Теорема (Больцано — Вейерштрасс) *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда:

$$\exists c, b \in \mathbb{R}: \ c \leq a_n \leq b, \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Разделим отрезок $[c, b]$ пополам. Хотя бы в одной из полученных половинок будет содержаться бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (поскольку общее число элементов последовательности на всем отрезке $[c, b]$ бесконечно). Выберем эту половинку и назовем ее $[c_1, b_1]$ (если в обеих половинках содержится бесконечное число элементов последовательности, то выберем любую из них). Отрезок $[c_1, b_1]$ снова делим пополам, и т.д. В результате придем к системе вложенных отрезков

$$[c, b] \supset [c_1, b_1] \supset [c_2, b_2] \supset \ldots,$$

которая по лемме Коши — Кантора имеет единственную общую точку: $d = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [c_n, b_n]$:

$$c \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n \leq \ldots \leq d \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b,$$

причем

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = d.$$

Построим подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ по следующему правилу: В качестве a_{m_1} возьмем любой элемент последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, лежащий в отрезке $[c_1, b_1]$. В качестве a_{m_2} возьмем любой элемент последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, лежащий в отрезке $[c_2, b_2]$ и имеющий номер $m_2 > m_1$ (поскольку в каждом очередном отрезке по построению содержится бесконечное число элементов последовательности, то это всегда можно сделать), и т.д. Тогда

$$c_n \leq a_{m_n} \leq b_n, \quad \forall n = 1, 2, \ldots,$$

и по теореме о двух "милиционерах" находим, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_{m_n} = d$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Это ограниченная расходящаяся последовательность $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$. Если оставить только элементы с четными номерами, то получим сходящуюся подпоследовательность: $1, 1, 1, 1, \ldots$. Аналогично если оставить только элементы с нечетными номерами, то снова получим сходящуюся подпоследовательность: $-1, -1, -1, -1, \ldots$.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, и все сходящиеся подпоследовательности этой последовательности сходятся к одному и тому же пределу, то тогда и вся последовательность будет сходиться к этому пределу.*

Доказательство. Пусть все сходящиеся подпоследовательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходятся к числу g. От противного, пусть $g \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Тогда:

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall K \in \mathbb{N}: \ \exists n \geq K \ \Rightarrow \ |a_n - g| \geq \varepsilon.$$

Возьмем $K = 1$. Для него найдем номер $m_1 \geq 1: \ |a_{m_1} - g| \geq \varepsilon$.

Теперь возьмем $K = m_1 + 1$. Для него найдем номер $m_2 \geq (m_1 + 1) > m_1$: $|a_{m_2} - g| \geq \varepsilon$, и т.д.

В результате получаем подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$, удовлетворяющую условию: $|a_{m_n} - g| \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если вся последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, то тогда и любая ее подпоследовательность будет также ограниченной. По теореме Больцано — Вейерштрасса выделим из последовательности $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{a_{p_{m_n}}\}_{n=1}^{+\infty}$. Подпоследовательность подпоследовательности — это тоже подпоследовательность исходной последовательности. Значит, по условию теоремы $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{p_{m_n}} = g$. Но с другой стороны по построению: $|a_{p_{m_n}} - g| \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

Следствие. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена и расходится, то у нее существуют по крайней мере две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам.*

Теорема (критерий сходимости Коши — Больцано). *Для сходимости последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ |a_n - a_K| < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Получаем

$$|a_n - a_K| = |(a_n - g) + (g - a_K)| \leq |a_n - g| + |a_K - g| < 2\varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

Обозначая 2ε за новое ε, приходим к требуемому.

Достаточность. Покажем сначала, что при выполнении критерия Коши — Больцано последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет ограниченной. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ |a_n - a_K| < 1.$$

Отсюда имеем

$$|a_n| - |a_K| \leq |a_n - a_K| < 1, \quad \forall n \geq K,$$

что влечет

$$|a_n| < 1 + |a_K|, \quad \forall n \geq K,$$

Полагая

$$M = \max\{|a_1|; \ldots; |a_{K-1}|;\ 1 + |a_K|\},$$

устанавливаем ограниченность последовательности: $|a_n| \leq M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

По теореме Больцано — Вейерштрасса выделяем сходящуюся подпоследовательность: $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Обозначим через g ее предел. Тогда, принимая во внимание рассмотренную ранее в данном параграфе лемму, имеем для $\forall \varepsilon > 0$:

1) $\exists K_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K_1\ \Rightarrow\ |a_n - a_{K_1}| < \varepsilon$ (записали критерий Коши — Больцано);

2) $|a_{m_n} - a_{K_1}| < \varepsilon,\ \forall n \geq K_1$ (воспользовались леммой);

3) $\exists K_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K_2\ \Rightarrow\ |a_{m_n} - g| < \varepsilon$ (записали определение предела для подпоследовательности).

Пусть $K = \max\{K_1; K_2\}$. Тогда при $n \geq K$ получим

$$|a_n - g| = |(a_n - a_{K_1}) + (a_{K_1} - a_{m_n}) + (a_{m_n} - g)| \leq$$

$$\leq |a_n - a_{K_1}| + |a_{K_1} - a_{m_n}| + |a_{m_n} - g| < 3\varepsilon.$$

Значит, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$. Теорема доказана.

Замечание. В отличие от определения предела, чтобы воспользоваться критерием Коши — Больцано, само значение предела последовательности знать не обязательно. Смысл критерия заключается в том, что у сходящейся последовательности отличия между элементами с ростом индексов этих элементов становится все меньше и меньше. Критерий сходимости Коши — Больцано можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geq K \ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

или

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K,\ \forall p > 0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Определение. *Предел некоторой сходящейся подпоследовательности (если таковая есть) последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется частичным пределом этой последовательности.*

Из доказанных ранее теорем следует, что если сама последовательность сходится, то все ее частичные пределы совпадают с пределом последовательности. Если последовательность ограничена и расходится, то у нее существуют по крайней мере два различных частичных предела.

Определение. *Наибольший из всех частичных пределов последовательности называется верхним пределом последовательности (пишут $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$). Аналогично наименьший из всех частичных пределов последовательности называется нижним пределом последовательности (пишут $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$).*

Теорема. *Верно:*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \ \Leftrightarrow\ \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность имеет два частичных предела -1 и 1. Значит,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -1 < \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1, \quad \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Пример. Пусть $a_n = \sin(\pi n/2)$, $n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность имеет три частичных предела -1, 0 и 1. Значит,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -1 < \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1, \quad \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Пример. Рассмотрим последовательность:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots.$$

Можно показать, что любое число из промежутка $[0, 1]$ является частичным пределом этой последовательности. Значит,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 0 < \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1, \quad \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Покажем, что нижний и верхний пределы у любой ограниченной последовательности всегда существуют, и получим для них некоторые специальные выражения.

Итак, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена. Тогда положим

$$M_* = \lim_{k\to+\infty} \inf_{n>k} a_n, \qquad M^* = \lim_{k\to+\infty} \sup_{n>k} a_n.$$

Лемма 1. *Для ограниченной последовательности верно:*
1) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists K_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n > K_1\ \Rightarrow\ a_n < M^* + \varepsilon;$
2) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists K_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n > K_2\ \Rightarrow\ a_n > M_* - \varepsilon.$

Доказательство. Докажем первое утверждение (для второго все аналогично). Рассмотрим последовательность $M_k = \sup\limits_{n>k} a_n$. Она монотонно убывает. Следовательно, $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} M_k = M^*$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K_1 \in \mathbb{N}:\ M_{K_1} < M^* + \varepsilon.$$

Имеем $a_n \le M_{K_1}$, $\forall n > K_1$. Значит, $a_n < M^* + \varepsilon$, $\forall n > K_1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для ограниченной последовательности верно:*
1) $\forall\varepsilon > 0,\ \forall K > 0,\ \exists n_1 > K:\ a_{n_1} > M^* - \varepsilon;$
2) $\forall\varepsilon > 0,\ \forall K > 0,\ \exists n_2 > K:\ a_{n_2} < M_* + \varepsilon.$

Доказательство. Докажем первое утверждение (для второго все аналогично). Имеем

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall K > 0\ \Rightarrow\ M_K \ge M^* > M^* - \varepsilon.$$

Тогда из определения супремума получаем: $\exists n_1 > K:\ a_{n_1} > M^* - \varepsilon$. Лемма доказана.

Для иллюстрации лемм 1 и 2 см. рисунок 1.

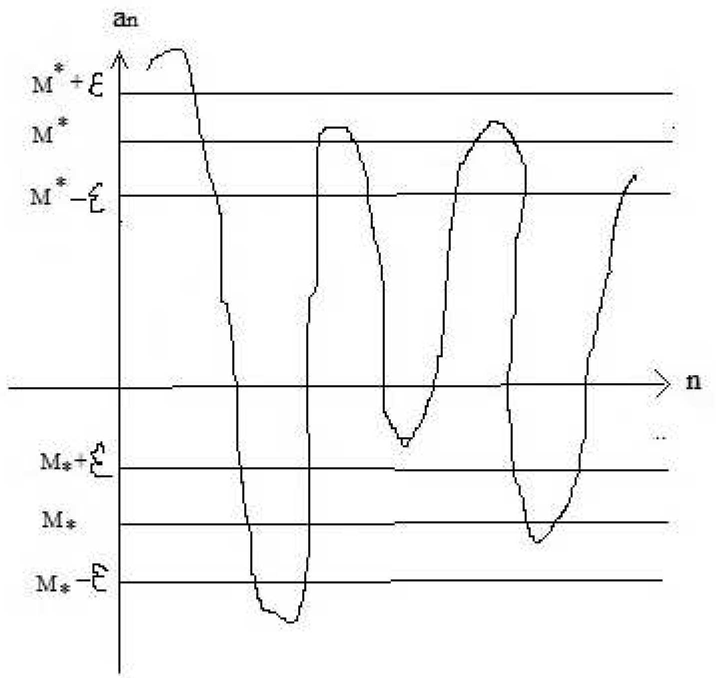

Рис. 1.

Теорема. *Для ограниченной последовательности верно:*

$$M_* = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n, \qquad M^* = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

Доказательство. Докажем для верхнего предела (для нижнего все аналогично).

Покажем сначала, что число M^* является частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Выберем $\forall\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$ (например, можно взять $\varepsilon_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$). Построим подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ по следующему правилу. Возьмем $m_1 = 1$. Далее по индукции, пусть индексы $m_1, \ldots, m_{n-1}$ выбраны. По лемме 1 для $\varepsilon = \varepsilon_n$ найдем $K_{1n} > 0$: $\forall n > K_{1n} \ \Rightarrow a_n < M^* + \varepsilon_n$. По лемме 2 для $\varepsilon = \varepsilon_n$ и $K = \max\{m_{n-1}; K_{1n}\}$ найдем $m_n > K$: $a_{m_n} > M^* - \varepsilon_n$. Таким образом, получим

$$M^* - \varepsilon_n < a_{m_n} < M^* + \varepsilon_n, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{m_n} = M^*$.

Покажем теперь, что M^* — наибольший из всех частичных пределов. Выберем любую сходящуюся подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Пусть g — ее предел. По лемме 1: $a_{m_n} < M^* + \varepsilon$ (при больших n). Тогда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим $g \leq M^* + \varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, то значит, должно выполняться условие $g \leq M^*$. Теорема доказана.

ГЛАВА II. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (продолжение)

§ 4. Сходимость к бесконечности

В предыдущих параграфах под сходимостью мы понимали наличие у последовательности конечного предела. Можно ввести понятие бесконечного предела.

Определение. *1) Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $+\infty$ при $n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$), если:*

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ a_n > M.$$

2) Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $-\infty$ при $n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$), если:

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ a_n < -M.$$

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то тогда она сходится к $+\infty$ ($-\infty$) при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Докажем для возрастающей последовательности (для убывающей все аналогично). Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не органичена сверху, то

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ a_K > M.$$

Но тогда, в силу монотонного возрастания, имеем

$$a_n \geq a_K > M,\ \forall n \geq K.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Теорема доказана.

Следствие. *Любая монотонная последовательность имеет предел, конечный, если она ограничена, и бесконечный — если не ограничена.*

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить подпоследовательность $\{a_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящуюся к $+\infty$ ($-\infty$) при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Докажем для последовательности, неограниченной свеху (для неограниченной снизу все аналогично). Имеем

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ a_K > M,$$

причем, нетрудно заметить, что таких индексов K должно быть бесконечное количество (иначе последовательность будет ограниченной сверху).

Возьмем $M = 1$, и найдем $m_1 \in \mathbb{N}:\ a_{m_1} > 1$.

Теперь возьмем $M = 2$, и найдем $m_2 > m_1:\ a_{m_2} > 2$, и т.д.

В результате получим подпоследовательнось, удовлетворяющую условию: $a_{m_n} > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{m_n} = +\infty$. Теорема доказана.

Замечание. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена сверху, то тогда $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Аналогично, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена снизу, то тогда $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Замечание. Не все теоремы, доказанные ранее для конечного предела, справедливы для бесконечного. Например, теорема об ограниченности сходящейся последовательности, очевидно, не верна для бесконечного предела. Критерий сходимости Коши — Больцано также в бесконечном случае не работает.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Тогда

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ a_n > M.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{M},\ \forall n \geq K.$$

Обозначая $\varepsilon = \frac{1}{M}$, приходим к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, то тогда a_n называется бесконечно большой положительной величиной при $n \to +\infty$. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, то тогда a_n называется бесконечно большой отрицательной величиной при $n \to +\infty$. Наконец, если $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, то тогда b_n называется бесконечно малой величиной при $n \to +\infty$. Доказанная теорема утверждает, что если величина a_n — бесконечно большая (положительная или отрицательная), то тогда величина $b_n = 1/a_n$ будет бесконечно малой. Обратная теорема, вообще говоря, не верна. В самом деле, пусть $b_n = (-1)^n/n$. Это бесконечно малая величина. Однако, величина $a_n = 1/b_n = (-1)^n n$ не будет ни бесконечно большой положительной, ни бесконечно большой отрицательной (ее можно лишь назвать бесконечно большой по модулю).

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$, *а последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *ограничена снизу (сверху). Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ $(-\infty)$.

Доказательство. Пусть для определенности $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, и последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена снизу (во втором случае все аналогично). Тогда

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ a_n > M,$$

а также

$$\exists T = \mathrm{const}:\ b_n \geq T,\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда получим, что

$$a_n + b_n > M + T,\ \forall n \geq K.$$

Обозначая $M + T$ за новое M (без потери общности его можно считать положительным, в силу фиксированности величины T), придем к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$, *и* $\exists C = \mathrm{const} > 0$: $b_n \geq C$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n b_n) = +\infty$ $(-\infty)$.

Доказательство. Пусть для определенности $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (во втором случае все аналогично). Тогда

$$\forall M > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ a_n > M.$$

Отсюда имеем, что

$$a_n b_n > MC,\ \forall n \geq K.$$

Обозначая MC за новое M, придем к определению предела $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n b_n) = +\infty$. Теорема доказана.

Теорема. *1) Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, *и* $b_n \geq a_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, *и* $b_n \leq a_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

Доказательство теоремы автоматически следует из определения бесконечного предела.

Определение. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$ *(бесконечность может быть любого знака). Тогда говорят, что выражение* $\frac{a_n}{b_n}$ *представляет собой неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$. *Раскрыть неопределенность — это значит, переписать выражение в таком виде, чтобы неопределенность исчезла.*

Пример. 1) Пусть $a_n = n$, $b_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$. Если сократим числитель и знаменатель дроби на n, то раскроем неопределенность: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

2) Пусть $a_n = n^2$, $b_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty}$. Если сократим числитель и знаменатель дроби на n, то раскроем неопределенность: $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

3) Пусть $a_n = 2n$, $b_n = n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$. Переписав выражение в виде $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{1+1/n} \to 2$ при $n \to +\infty$, раскроем неопределенность.

4) Пусть $a_n = n(2 + \sin n)$, $b_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n(2+\sin n)}{n} = \frac{\infty}{\infty}$. Если сократим числитель и знаменатель дроби на n, то получим $\frac{a_n}{b_n} = 2 + \sin n$. Но это выражение не имеет предела при $n \to +\infty$. Значит, такую неопределенность раскрыть нельзя.

Замечание. Аналогично можно ввести неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, и т.д. Отметим, что все эти неопределенности можно сводить друг к другу с помощью различных преобразований.

Пример. Имеем

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = [0 \cdot \infty] =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \ldots.$$

Общих правил раскрытия неопределенностей нет. Иногда помогает следующая теорема.

Теорема (Штольц). *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, *причем последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *строго возрастает, начиная с некоторого номера* n. *Тогда если*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = I$$

(значение I *может быть как конечное, так и бесконечное), то*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = I.$$

Доказательство. 1) Пусть $I \neq \infty$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n > K\ \Rightarrow\ \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - I\right| < \varepsilon.$$

Отсюда
$$I-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<I+\varepsilon,\quad \forall n>K.$$
Получаем
$$I-\varepsilon<\frac{a_{K+1}-a_K}{b_{K+1}-b_K}<I+\varepsilon,\quad \ldots,\quad I-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<I+\varepsilon,\quad \forall n>K. \tag{1}$$

Легко доказать следующее свойство:
$$\forall a,b,c,d=\mathrm{const}:\ (b,d>0)\&\left(\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)\ \Rightarrow\ \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$
Тогда из (1) находим, что
$$I-\varepsilon<\frac{a_n-a_K}{b_n-b_K}<I+\varepsilon,\quad \forall n>K,$$
т.е.
$$\left|\frac{a_n-a_K}{b_n-b_K}-I\right|<\varepsilon,\quad \forall n>K.$$

Можно проверить тождество:
$$\frac{a_n}{b_n}-I=\frac{a_K-Ib_K}{b_n}+\left(1-\frac{b_K}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_K}{b_n-b_K}-I\right).$$
Значит,
$$\left|\frac{a_n}{b_n}-I\right|=\left|\frac{a_K-Ib_K}{b_n}\right|+\left|\frac{a_n-a_K}{b_n-b_K}-I\right|.$$

В силу стремления b_n к $+\infty$ при $n\to+\infty$, имеем
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists K'\in\mathbb{N}:\ \forall n>K'\ \Rightarrow\ \left|\frac{a_K-Ib_K}{b_n}\right|<\varepsilon.$$

Положим $\bar{K}=\max\{K;\,K'\}$. Тогда при $n>\bar{K}$ получим
$$\left|\frac{a_n}{b_n}-I\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$
Следовательно,
$$\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=I.$$

2) Пусть теперь $I=+\infty$ (для $-\infty$ все аналогично). При достаточно больших n должно выполняться условие:
$$a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0.$$
Отсюда, поскольку $b_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, то тогда $a_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$.

По уже доказанному случаю 1) имеем:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{I}=0.$$
Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Штольца является дискретным аналогом правила Лопиталя (см. далее). Отметим, что если $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, то тогда теоремой Штольца пользоваться нельзя.

Пример. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} = (\text{Штольц}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}) - (1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1})}{n-(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}} = (\text{Штольц}) =$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = 1.$$

ГЛАВА II. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (продолжение)

§ 5. Комплексные последовательности

В данном параграфе рассмотрим распространение теории вещественных числовых последовательностей на комплексный случай.

Пусть каждому натуральному номеру $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие комплексное число $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Тогда говорят, что задана комплексная последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Определение. *Комплексная последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если $\exists M > 0$: $|\alpha_n| \le M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Здесь под модулем понимается модуль комплексного числа.*

Замечание. Множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|z| \le M$ ($M = \mathrm{const} > 0$) представляет собой круг на комплексной плоскости с центром в начале координат и радиусом M. Таким образом, ограниченность комплексной последовательности означает, что все элементы последовательности лежат в некотором конечном круге на комплексной плоскости.

Определение. *Комплексное число g называется пределом комплексной последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ при $n \to +\infty$ (пишут $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = g$), если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge K \ \Rightarrow\ |\alpha_n - g| < \varepsilon.$$

Пусть $g = a + ib$, $\alpha_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $a, b, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|\alpha_n - g| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon.$$

Теорема. *Верно:*

$$\exists \lim_{n\to+\infty}(a_n + ib_n) = a + ib \ \Leftrightarrow\ \left(\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = a\right) \& \left(\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = b\right).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + ib_n) = a + ib$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge K \ \Rightarrow\ \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$|a_n - a| \le \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon, \quad \forall n \ge K,$$

$$|b_n - b| \le \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon, \quad \forall n \ge K.$$

Значит,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = a, \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Достаточность. Пусть

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = a, \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \ge K \ \Rightarrow\ (|a_n - a| < \varepsilon) \& (|b_n - b| < \varepsilon).$$

Получаем

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}, \quad \forall n \ge K.$$

Значит, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$. Теорема доказана.

Замечание. Последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — вещественные. Таким образом, согласно доказанной теореме, исследование сходимости комплексной последовательности может быть сведено к исследованию сходимости вещественных последовательностей. В результате вся теория вещественных последовательностей легко переносится на комплексный случай. Заметим, однако, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ — не упорядоченно. Поэтому теоремы, в которых задействуются операции отношения "$<$", "$>$", "$\le$", "$\ge$" на комплексный случай напрямую не переносятся (например, теорема о пределе неотрицательной последовательности, теорема о двух "милиционерах", теорема о монотонной последовательности, и т.п.). Кроме того, в комплексном случае не вводятся понятия верхнего и нижнего предела, а также, вообще говоря, не вводится понятие бесконечного предела без каких-то дополнительных уточнений о том, что понимается под бесконечностью в комплексном случае.

Для комплексных последовательностей будут верны следующие утверждения:

1) Если последовательность имеет предел, то он единственен.

2) Если последовательность сходится, то она ограничена.

3) Изменение конечного числа элементов последовательности не влияет ни на сходимость, ни на значение предела.

4) Верны арифметические свойства пределов.

5) Если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же самому пределу (все частичные пределы равны между собой).

6) Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

7) Если последовательность ограничена и расходится, то у нее существуют по крайней мере две подпоследовательности, сходящиеся к различных пределам (есть по крайней мере два различных частичных предела).

8) Сходимость последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ эквивалентна выполнению для нее критерия сходимости Коши — Больцано:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists K\in\mathbb{N}:\ \forall n\ge K\ \Rightarrow\ |\alpha_n-\alpha_K|<\varepsilon.$$

§ 6. Некоторые примеры на вычисление предела

Пример. Верно:

$$\lim_{n\to+\infty}(p_0n^k+p_1n^{k-1}+\ldots+p_k)=\begin{cases}+\infty, & \text{если}\ \ p_0>0,\\ -\infty, & \text{если}\ \ p_0<0.\end{cases}$$

Здесь $p_0,\ldots,p_k\in\mathbb{R}$, $p_0\ne0$; $k\in\mathbb{N}$.

Пример. Верно:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_0n^k+p_1n^{k-1}+\ldots+p_k}{q_0n^m+q_1n^{m-1}+\ldots+q_m}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если}\ \ k>m,\\ 0, & \text{если}\ \ k<m,\\ p_0/q_0, & \text{если}\ \ k=m.\end{cases}$$

Здесь $p_0,\ldots,p_k,q_0,\ldots,q_m\in\mathbb{R}$, $p_0,q_0\ne0$; $k,m\in\mathbb{N}$.

Пример. Пусть $0<k<1$. Тогда

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)^k-n^k\right)=\lim_{n\to+\infty}n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right)\le$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{k-1} = 0.$$

Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \left((n+1)^k - n^k\right) = 0.$$

Пример. Верно:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Пусть

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq c_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Левая и правая части данного неравенства стремятся к 1 при $n \to +\infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$ (по теореме о двух "милиционерах").

Пример. Имеем

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^c} = 0,\ \forall a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0;$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ b > 0;$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \forall a > 0.$

Пример. Пусть

$$a_n = \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots}}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $c > 0$.

Получаем:

$$a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда легко доказать, что:

1) $a_{n+1} > a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (т.е. последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает);

2) $a_n < \sqrt{c}+1$, $n = 1, 2, \ldots$ (т.е. последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена сверху).

Следовательно: $\exists g = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Перейдем в реккурентной формуле для a_n к пределу при $n \to +\infty$. Получим уравнение для нахождения числа g:

$$g = \sqrt{c+g}.$$

Отсюда находим: $g = (\sqrt{4c+1}+1)/2$.

Пример. Пусть

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Для доказательства сходимости этой последовательности применим критерий Коши — Больцано.

Имеем

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти $K \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{1}{2^K} < \varepsilon$$

(достаточно положить $K = [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}] + 1$).

Тогда: $|a_{n+p} - a_n| < 1/2^n \leq 1/2^K < \varepsilon$, $\forall n \geq K$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Таким образом, пришли к требуемому критерию:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq K,\ \forall p > 0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Значит, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ (причем этот предел — конечный).

ГЛАВА III. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие функции

Пусть X, Y — два множества. Предположим, что задано правило, согласно которому каждому элементу множества $x \in X$ ставится в соответствие однозначным образом элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда говорят, что задано отображение множества X на множество Y. Множество X назовем областью задания (определения) отображения, а множество Y — областью значений. Элементы $x \in X$ назовем аргументами (праобразами), а элементы $y = f(x) \in Y$ — значениями (образами). В зависимости от "природы" множеств X и Y отображение может называться по-разному: функцией, функционалом, оператором, мерой, морфизмом, и т.д. Так, если X и Y — это числовые множество, то тогда отображение принято называть функцией.

Далее будем считать, что $X, Y \subset \mathbb{R}$, т.е. будем рассматривать вещественные функции одного вещественного аргумента. Функция может задаваться формулой, таблицей, графиком, алгоритмом, и т.д.

Определение. *1) Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве X, если:*

$$\exists M \in \mathbb{R}: \ f(x) \leq M, \ \forall x \in X.$$

2) Функция $f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве X, если:

$$\exists m \in \mathbb{R}: \ f(x) \geq m, \ \forall x \in X.$$

3) Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если она ограничена на этом множестве и сверху, и снизу.

Определение. *Пусть $X = [a, b]$. Функция $f(x)$ называется на этом отрезке:*

1) неубывающей, если: $\forall x_1, x_2 \in X: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$;

2) строго возрастающей, если: $\forall x_1, x_2 \in X: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$;

3) невозрастающей, если: $\forall x_1, x_2 \in X: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)$;

4) строго убывающей, если: $\forall x_1, x_2 \in X: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$.

Во всех четырех описанных случаях функция $f(x)$ называется монотонной на отрезке $[a, b]$.

Определение. *Пусть $X = [-a, a]$ $(a \in \mathbb{R})$. Функция $f(x)$ называется на этом отрезке:*

1) четной, если: $f(-x) = f(x), \ \forall x \in X$;

2) нечетной, если: $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in X$.

Определение. *Пусть $X = \mathbb{R}$. Функция $f(x)$ называется периодической, если:* $\exists T > 0: \ f(x+T) = f(x), \ \forall x \in X$. *Число T называется в этом случае периодом функции.*

Определение. *Пусть функция $y = f(x)$ задает отображение множества X на множество Y. Тогда обратное отображение, согласно которому по образу $y \in Y$ определяется значение праобраза $x \in X$, называется обратной функцией:* $x = f^{(-1)}(y)$.

Замечание. Обратное отображение может быть неоднозначным. В этом случае область X можно попытаться разбить на непересекающиеся части так, чтобы для каждой из этих частей обратное отображение было однозначным. Если это удастся сделать, то получим несколько ветвей обратной функции.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^2$, заданную на множестве $X = \mathbb{R}$. На данном множестве функция не является взаимно-однозначной (обратная функция находится не однозначно: $x = \pm\sqrt{y}$). Если разбить область определения на две части: $X = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$, то на этих интервалах обратная функция определяется однозначно: $x = -\sqrt{y}$ и $x = \sqrt{y}$, соответственно.

Рассмотрим некоторые классы функций, которые принято называть элементарными:

1) Полиномиальная функция:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

2) Рациональная (дробно-рациональная) функция:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Здесь $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.

3) Степенная функция:

$$f(x) = x^a.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$.

4) Показательная функция:

$$f(x) = a^x.$$

Здесь $a > 0$, $a \neq 1$. В частности, $f(x) = e^x$ — экспоненциальная функция.

4) Логарифмическая функция:

$$f(x) = \log_a x.$$

Здесь $a > 0$, $a \neq 1$. В частности, $f(x) = \ln x$ — натуральный логарифм.

5) Тригонометрические функции:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x.$$

6) Обратные тригонометрические функции:

$$\mathrm{arcsin} x, \quad \mathrm{arccos} x, \quad \mathrm{arctg} x, \quad \mathrm{arcctg} x.$$

7) Гиперболические функции:

$$\mathrm{sh} x, \quad \mathrm{ch} x, \quad \mathrm{th} x, \quad \mathrm{cth} x.$$

И т.д.

Определение. *Пусть функция $y = f(x)$ отображает множество X во множество Y, а функция $x = g(t)$ отображает множество T во множество X. Тогда функция $y = f(g(t))$, отображающая T в Y, называется сложной функцией, или иначе, суперпозицией функций $f(x)$ и $g(t)$.*

Пример. Функция $\sin(x^2)$ является суперпозицией двух элементарных функций (тригонометрической и полиномиальной).

Определение. *Функция $f(x)$ называется простейшей, если она может быть построена из элементарных функций путем применения к ним конечного числа арифметических операций и суперпозиций.*

Пример. Пусть

$$f(x) = \frac{e^{\sin\sqrt{x}}\cos^2(x-1) + \ln\sqrt[3]{x}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x\, 2^x}.$$

Это простейшая функция.

Рассмотрим некоторые примеры непростейших функций:

1) Функция задается не формулой, а каким-то правилом. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

— функция Дирихле.

2) Функция, заданная неявно. Например,

$$x = y^3 + y.$$

3) Функция, заданная в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

4) Функция, заданная в виде неберущегося интеграла.

И т.д.

§ 2. Предел функции

Пусть задано некоторое множество $X \subset \mathbb{R}$.

Лемма. *Если a — предельная точка множества X, то тогда найдется такая последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $a \neq \infty$. Согласно определению предельной точки, получаем:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists x \in X : \ (x \neq a)\&(|x - a| < \varepsilon).$$

Возьмем $\varepsilon_1 = 1$. Найдем $x_1 \in X$: $(x_1 \neq a)\&(|x_1 - a| < 1)$.

Пусть теперь $\varepsilon_2 = |x_1 - a|/2$. Тогда находим $x_2 \in X$:

$$(x_2 \neq a)\&(|x_2 - a| < |x_1 - a|/2 < 1/2),$$

и т.д.

В результате получим последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$:

$$(x_n \neq a)\&(|x_n - a| < 1/2^{n-1}).$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

2) Предположим, что $a = +\infty$ (для $a = -\infty$ все аналогично). Тогда

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists x \in X : \ x > \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon_1 = 1$. Найдем $x_1 \in X$: $x_1 > 1$.

Возьмем $\varepsilon_2 = \max\{2; x_1\}$. Найдем $x_2 \in X$: $x_1 > \varepsilon_2$, и т.д.

В результате получим последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$: $x_n > n$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Лемма доказана.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X.

Определение (предел функции по Гейне). *Пусть a — предельная точка множества X. Число g называется пределом функции $f(x)$ в точке a ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$), если*

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X: \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Здесь величины a и g могут быть как конечные, так и бесконечные.

Согласно введенному определению, понятие предела функции сводится к понятию предела последовательности, рассмотренному ранее в предыдущей главе.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$, $a = 0$. Выбираем произвольные последовательности аргументов, стремящиеся к точке 0, например:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad \text{или} \quad x_n = e^{-n}, \quad \text{или} \quad x_n = \frac{1}{\ln(1+n)}, \quad \text{или} \quad \ldots.$$

Получаем

$$f(x_n) = \frac{1}{n^2}, \quad \text{или} \quad f(x_n) = e^{-2n}, \quad \text{или} \quad f(x_n) = \frac{1}{\ln^2(1+n)}, \quad \text{или} \quad \ldots.$$

Все эти последовательности стремятся к нулю. Нетрудно доказать, что

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X: \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} x_n^2 = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Пример. Пусть $f(x) = \sin(1/x)$, $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $a = 0$. Рассмотрим последовательности аргументов:

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi n}, \quad x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Обе эти последовательности стремятся к точке 0 при $n \to +\infty$. Но при этом

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n^{(1)}) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n^{(2)}) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1.$$

Значит, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$.

Определение. *Если в определении предела брать только такие последовательности аргументов, что $x_n \geq a$, то тогда число g называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке a ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = g$). Аналогично, если $x_n \leq a$, то тогда число g называется левосторонним пределом функции ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = g$).*

Ясно, что

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = g \ \Leftrightarrow \ \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = g.$$

Пример. Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$, $a = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = 1, \quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

Заметим, что лево и правосторонних пределов также может и не быть у функции в заданной точке.

Определение. *Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Предположим, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$. Тогда число g называется частичным пределом* *функции $f(x)$ в точке a. Наименьший из всех частичных пределов называется нижним пределом ($\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$), а наибольший — верхним ($\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$).*

Ясно, что

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = g \;\Leftrightarrow\; \underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = g.$$

Заметим, что нижний и верхний пределы (конечные или бесконечные) у функции всегда существуют.

Пример. Пусть $f(x) = \sin(1/x)$, $a = 0$. Нетрудно показать, что любое число из промежутка $[-1, 1]$ является частичным пределом этой функции в точке 0. Значит,

$$\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1, \quad \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

ГЛАВА III. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 2. Предел функции (продолжение)

Сведение понятие предела функции к понятию предела последовательности позволяет многие теоремы, доказанные ранее для последовательностей, перенести на функции. В частности, имеем следующие результаты.

Теорема (арифметические свойства). *Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = g$, $\exists \lim\limits_{x\to a} l(x) = h$. *Тогда:*

1) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) + l(x)) = g + h$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) - l(x)) = g - h$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)l(x)) = gh$;

4) если $h \neq 0$, *то* $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)/l(x)) = g/h$.

Теорема. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a} l(x)$. *Тогда:*

1) если $f(x) \le l(x)$ *в некоторой окрестности точки* a, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} l(x)$;

2) если $f(x) \le s(x) \le l(x)$ *в некоторой окрестности точки* a, *и при этом* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} l(x) = g$, *то* $\exists \lim\limits_{x\to a} s(x) = g$.

Теорема (о суперпозиции пределов). *Пусть*

$$y = f(x) : \ X \to Y, \qquad z = g(y) : \ Y \to Z.$$

Тогда если

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{y\to A} g(y) = B,$$

то

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = B.$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Положим $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$, и значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = B$. Получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} g(f(x_n)) = B$. Имеем требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Пусть, например, требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Сделаем замену переменных $x = g(t)$. Если $\exists \lim\limits_{t\to b} g(t) = a$, то тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to b} f(g(t))$. Таким образом, замена переменных позволяет менять значение предельной точки при вычислении предела. Поэтому далее без потери общности многие результаты (в частности, "замечательные пределы") будут приведены для случая, когда в качестве предельной точки выступает какое-то конкретное значение, например, точка 0.

Пример. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = \left[t = \frac{1}{x}\right] = \lim_{t\to+0} \sin t = 0,$$

$$\lim_{x\to 2} \sin(x-2) = \left[t = x - 2\right] = \lim_{t\to 0} \sin t = 0,$$

и т.п.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *монотонно возрастает (убывает) на интервале* $[a, b)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ *(конечный, если функция* $f(x)$ *ограничена на указанном интервале, и бесконечный, если — неограничена).*

Доказательство. Докажем теорему для случая возрастающей и ограниченной функции (в остальных случаях все аналогично).

Построим возрастающую последовательность $\left\{b - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда последовательность $\left\{f(b - \frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{+\infty}$ также возрастает. Значит, с учетом ограниченности функции, $\exists\ g = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b - \frac{1}{n})$, откуда:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ |g - f(b - \frac{1}{K})| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, причем $x_n < b$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда:

$$\exists m \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq m\ \Rightarrow\ b - \frac{1}{K} < x_n.$$

Получаем

$$f(b - \frac{1}{K}) \leq f(x_n), \quad \forall n \geq m.$$

Значит,

$$g - f(x_n) \leq g - f(b - \frac{1}{K}) < \varepsilon, \quad \forall n \geq m.$$

С другой стороны,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{N}:\ x_n < b - \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$f(x_n) \leq f(b - \frac{1}{r}) \leq g,$$

и следовательно, $g - f(x_n) \geq 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом,

$$0 \leq g - f(x_n) < \varepsilon, \quad \forall n \geq m.$$

Отсюда: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$.

Согласно определению предела функции, находим требуемое: $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = g$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$. *Тогда: найдется такая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, *и при этом* $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Доказательство. Если $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то значит, у функции $f(x)$ в точке a существует по крайней мере два различных частичных предела. Пусть выбраны две последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{x''_n\}_{n=1}^{+\infty}$ так, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, но при этом $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n)$. Построим последовательность:

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ \ldots.$$

Эта последовательность точек сходится к a при $n \to +\infty$, но при этом последовательность

$$f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \ldots$$

расходится (у нее есть два различных частичных предела). Получили требуемое. Теорема доказана.

Определение предела функции по Гейне имеет свои достоинства и свои недостатки. Так, например, с его помощью удобно доказывать отсутствие предела у функции в заданной точке. В то же время для доказательства существования предела оно может оказаться не удобным. Введем другое определение предела, не связанное напрямую с теорией последовательностей.

Определение (предел функции по Коши). *Пусть a — предельная точка множества X. Тогда будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$, если*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in (X \cap U_\delta(a)) \ \Rightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(g).$$

Отметим, что величины a и g во введенном определении могут быть как конечные, так и бесконечные.

1) Пусть, например, числа a и g — конечные. Тогда получим следующее определение предела:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X :\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-g| < \varepsilon.$$

2) Пусть $a = -\infty$, $g = +\infty$. Тогда получим

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X :\ x < -\delta \ \Rightarrow\ f(x) > \varepsilon.$$

И т.д.

Теорема. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Пусть для определенности числа a и g — конечные (в противном случае все аналогично).

1) Пусть $g = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X :\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-g| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Получаем для выбранного значения $\delta > 0$:

$$\exists K \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ |x_n - a| < \delta.$$

Следовательно,

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

В итоге имеем, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ |f(x_n) - g| < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$. Значит, $g = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Гейне.

2) Пусть $g \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Тогда

$$\exists\varepsilon > 0 :\ \forall\delta > 0,\ \exists x \in X :\ (|x-a| < \delta)\ \&\ (|f(x)-g| \geq \varepsilon).$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Получаем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$:

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - g| \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq g$. Таким образом, $g \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Теорема доказана.

Теорема (критерий Коши существования предела функции). *Для того, чтобы существовал конечный* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x',\, x'' \in (X \cap U_\delta(a)) \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = g \neq \infty$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x',\, x'' \in (X \cap U_\delta(a)) \ \Rightarrow\ (|f(x') - g| < \varepsilon)\ \&\ (|f(x'') - g| < \varepsilon).$$

Отсюда имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - g) + (g - f(x''))| \leq |f(x') - g| + |f(x'') - g| < 2\varepsilon.$$

Пришли к критерию Коши.

Достаточность. Пусть выполнен критерий Коши

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x',\, x'' \in (X \cap U_\delta(a)) \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

но при этом $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Тогда по доказанному ранее найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, и при этом $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Получаем для выбранного значения $\delta > 0$:

$$\exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ x_n,\, x_K \in U_\delta(a).$$

Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_K)| < \varepsilon.$$

Получили критерий Коши — Больцано сходимости последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K \ \Rightarrow\ |f(x_n) - f(x_K)| < \varepsilon.$$

Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. Критерий сходимости Коши работает только для конечных пределов. Его смысл заключается в том, что если функция $f(x)$ при приближении аргумента к точке a стремится к конечному пределу, то она не должна совершать резких колебаний в малой окрестности указанной точки. В отличие от определения предела, для использования критерия сходимости Коши не обязательно знать значение предела функции.

В частном случае, если $a \neq \infty$, критерий Коши принимает вид:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x',\, x'' \in X:\ (|x' - a| < \delta)\ \&\ (|x'' - a| < \delta) \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

ГЛАВА III. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, и точка a является предельной точкой этого множества.

Определение. *1) Если* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *то говорят, что* $f(x)$ *— бесконечно малая величина при* $x \to a$.

2) Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty\,(-\infty)$, *то говорят, что* $f(x)$ *— бесконечно большая положительная (отрицательная) величина при* $x \to a$.

Далее в настоящем параграфе рассмотрим классификацию бесконечно малых величин. Для бесконечно больших величин можно ввести аналогичную классификацию. Кроме того, отметим, что исследование бесконечно большой величины $f(x)$ может быть сведено к исследованию бесконечно малой величины путем замены $\tilde{f}(x) = 1/f(x)$.

Определение. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *— бесконечно малые величины при* $x \to a$. *Тогда:*

1) если $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, *причем* $k \neq 0$ *и* $k \neq \infty$, *то говорят, что величины* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют одинаковый порядок малости при* $x \to a$;

2) если $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *то говорят, что величина* $f(x)$ *имеет более высокий порядок малости по сравнению с величиной* $g(x)$ *при* $x \to a$ *(пишут:* $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$*); аналогично, если* $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, *то получим* $g(x) = \mathrm{o}(f(x))$ *при* $x \to a$;

3) если $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g^m(x)} = k$, *где* $m = \mathrm{const}$, *причем* $k \neq 0$ *и* $k \neq \infty$, *то говорят, что величина* $f(x)$ *имеет* m*-ый порядок малости по сравнению с величиной* $g(x)$ *при* $x \to a$;

4) если $\nexists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *то говорят, что величины* $f(x)$ *и* $g(x)$ *не сравнимы при* $x \to a$.

Пример. Пусть $a = +\infty$. Тогда:

1) величины $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ имеют один порядок малости при $x \to +\infty$, поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1;$$

2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с величиной $g(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$, поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0;$$

в этом случае величина $f(x)$ имеет второй порядок малости по сравнению с величиной $g(x)$ при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1;$$

3) величины $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x(2+\sin x)}$ не сравнимы при при $x \to +\infty$, поскольку

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} (2 + \sin x).$$

Определение. *Говорят, что величина $f(x)$ ограничена величиной $g(x)$ при $x \to a$ (пишут: $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$), если $\exists C = \mathrm{const} > 0$: $|f(x)| \leq C|g(x)|$ для всех x из некоторой окрестности точки a.*

Пример. Можно сказать, что величины $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x(2+\sin x)}$ ограничивают друг друга при $x \to +\infty$ ($f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ и $g(x) = \mathrm{O}(f(x))$), поскольку:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |2 + \sin x| \leq 3, \qquad \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{1}{|2 + \sin x|} \leq 1$$

при всех $x \in \mathbb{R}$.

Определение. *Величины $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными друг другу (будем писать $f(x) \sim g(x)$) при $x \to a$, если*

$$f(x) - g(x) = \mathrm{o}(g(x)) \quad \& \quad f(x) - g(x) = \mathrm{o}(f(x)).$$

Теорема. *Верно:*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Доказательство. Имеем:

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = \mathrm{o}(g(x)).$$

Аналогично

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to a} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = \mathrm{o}(f(x)).$$

Теорема доказана.

Теорема. *Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = I$, и при этом $f(x) \sim \tilde{f}(x)$ и $g(x) \sim \tilde{g}(x)$ при $x \to a$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = I$.*

Доказательство. Имеем:

$$I = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \lim_{x \to a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \lim_{x \to a} \frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет при вычислении предела заменять сложные выражения их простыми эквивалентными аналогами.

Теорема (первый "замечательный" предел). *Верно:*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. Обозначим $k_n = [x_n]$ — целая часть величины x_n. Нетрудно доказать, что функция $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$. Тогда из соотношений

$$k_n \leq x_n < k_n + 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

следует

$$\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = e$$

(это подпоследовательности сходящейся последовательности: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$), то по теореме "о двух милиционерах" получаем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Значит, согласно определению предела функции по Гейне, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Теорема доказана.

Замечание. Если $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = I$, то с учетом определения предела по Гейне, имеем, что также $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = I$ (здесь $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$). Обратное, в общем случае, не верно. Например, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0$, но $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$.

Замечание. Доказанный "замечательный" предел можно переписать в виде:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.$$

Теорема (второй "замечательный" предел). *Верно:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Без потери общности считаем, что $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Рассмотрим единичную окружность (см. рисунок 1).

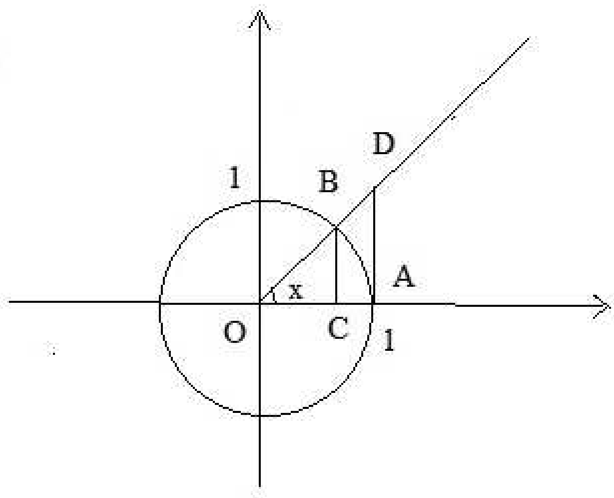

Рис. 1.

Имеем:

$$|AD| < |AB| < |BC|$$

(здесь $|\cdot|$ — длина соответствующего отрезка или дуги). Тогда при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ получаем, что

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

или

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $x \to 0$, установим требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$. Аналогично можно доказать (см. далее формулу Тейлора), что при $x \to 0$ справедливы соотношения:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^m \sim 1 + mx \quad (m = \mathrm{const}),$$

$$e^x \sim 1 + x, \quad a^x \sim 1 + x \ln a \quad (a = \mathrm{const} > 0), \quad \ldots .$$

Определение. *Если $f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g(x))$ при $x \to a$, то тогда величина $g(x)$ называется главной частью величины $f(x)$ при $x \to a$.*

Пример. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \sqrt{1+x} - 1}{\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + (1 + \frac{1}{2}x) - 1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Пример. Для указанных выше элементарных функций простая главная часть была выделена при $x \to 0$. Но, как это уже отмечалось ранее, с помощью замены переменных можно осуществлять смену предельной точки. Например:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \cos(x-1)}{x-1} = \left[x - 1 = y\right] = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+y} - \cos y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{3}y) - 1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Пример. При применении указанного подхода надо следить, чтобы не происходило сокращение используемой главной части, ибо тогда на главную роль выйдут слагаемые большего порядка малости. Например, следующее вычисление предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

является не верным. В самом деле, $\sin x \neq x$. Мы можем лишь утверждать, что $\sin x = x + \mathrm{o}(x)$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{o}(x)}{x^3} = ?,$$

и мы приходим к необходимости рассмотрения слагаемых большего порядка малости (надо исследовать, что скрывается за выражением $\mathrm{o}(x)$). Более подробно этот вопрос будет рассмотрен после установления формулы Тейлора (см. далее).

ГЛАВА III. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 4. Непрерывные функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Таким образом, непрерывность функции $f(x)$ в точке a означает, что:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X : \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a),$$

или, что то же самое:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке $a \in X$, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$. Аналогично, функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке $a \in X$, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.*

Ясно, что для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке a необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в этой точке (см. рисунок 1).

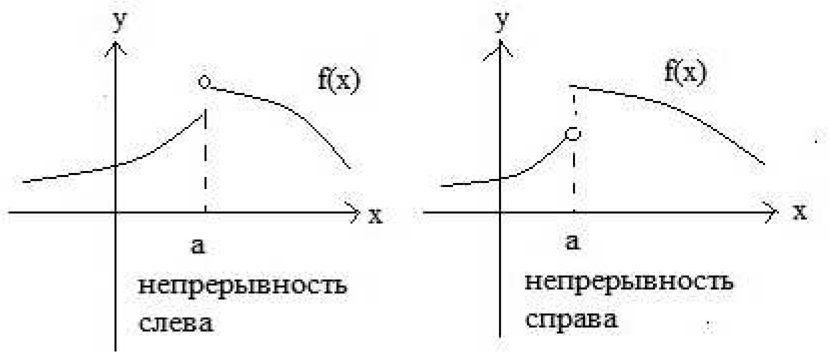

Рис. 1.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества. В частности, $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.*

Пусть $a \in X$. Зададим в этой точке приращение h, т.е. сдвинемся в точку $x = a+h$ (величина h может быть как положительная, так и отрицательная). Тогда величина

$$\Delta f = f(a + h) - f(a)$$

называется приращением функции $f(x)$ в точке a, соответствующем приращению аргумента h.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно записать в следующем виде:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall h:\ |h| < \delta\ \Rightarrow\ |\Delta f| < \varepsilon.$$

Смысл непрерывности заключается в том, что малым приращениям аргумента соответствуют малые приращения функции.

Пример. Покажем, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на всем множестве $X = \mathbb{R}$. Выберем произвольное $x \in \mathbb{R}$ и зададим в этой точке приращение аргумента h. Тогда

$$|\Delta f| = |\sin(x+h) - \sin x| = 2|\sin\frac{h}{2}|\,|\cos(x+\frac{h}{2})| \le 2|\sin\frac{h}{2}| < |h|.$$

По произвольному $\varepsilon > 0$ зададим $\delta = \varepsilon$. Тогда получим требуемое определение непрерывности.

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда в этой точке будут непрерывны функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, а если $g(a) \ne 0$, то и функция $f(x)/g(x)$.*

Доказательство теоремы следует из арифметиченских свойств пределов.

Теорема (о непрерывности суперпозиции непрерывных функций). *Пусть функции $y = f(x)$ непрерывна в точке a, и функция $z = g(y)$ непрерывны в точке $f(a)$. Тогда функция $z = g(f(x))$ будет непрерывной в точке a.*

Доказательство теоремы следует из теоремы о суперпозиции пределов.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, и $f(a) > 0$ (< 0). Тогда:*

$$\exists\delta > 0:\ \forall x \in U_\delta(a)\ \Rightarrow\ f(x) > 0\ (< 0).$$

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$ (если $f(x) < 0$, то все аналогично). В определении непрерывности выберем $\varepsilon = f(a)/2$. Тогда:

$$\exists\delta > 0:\ \forall x:\ |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < f(a)/2.$$

Поскольку $f(a) - f(x) < |f(x) - f(a)|$, то получаем:

$$f(x) > f(a)/2 > 0, \quad \forall x \in U_\delta(a).$$

Лемма доказана.

Определение. *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если:*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x',\, x'' \in X:\ |x' - x''| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Суть равномерной непрерывности заключается в том, что величина δ зависит только от ε и не зависит от выбора точек x', x'' (т.е. величину δ мы можем выбрать единую для всего множества X). В определении простой непрерывности в каждой точке $a \in X$ значение δ выбирается, вообще говоря, свое. Ясно, что из равномерной непрерывности на множестве следует обычная непрерывность на этом множестве, а обратное, не обязательно.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$, $X = \mathbb{R}$. Ранее было доказано, что эта функция непрерывна на указанном множестве, причем можно положить $\delta = \varepsilon$. Поскольку значение δ не зависит от выбора точки из множества X, то значит, функция $\sin x$ равномерно непрерывна на всем множестве $\mathbb{R}$.

Пример. Пусть $f(x) = 1/x$, $X = (0,1]$. Выбранная функция непрерывна на заданном множестве, покажем, что неравномерно. Для этого докажем, что:

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0 :\ \exists x',\, x'' \in X :\ |x' - x''| < \delta \ \&\ |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Выберем $\forall\delta > 0$. Положим $x' = \frac{1}{m}$, $x'' = \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2}$, где $m > 1$. Без потери общности считаем, что величина δ мала, и x', $x'' \in (0,1]$. Тогда $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, и при этом

$$|f(x') - f(x'')| = \left| m - \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{\delta}{2}} \right| = \frac{m^2\delta}{2 + m\delta} \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно, при достаточно большом значении m получим $|f(x') - f(x'')| \geq 1$. Установили требуемое.

Теорема (Кантор). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то тогда она будет и равномерно непрерывной на этом отрезке.*

Доказательство. От противного, пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Тогда:

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0 :\ \exists x',\, x'' \in [a,b] :\ |x' - x''| < \delta \ \ \&\ \ |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Выберем: $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда: $\exists\, x'_n,\, x''_n \in [a,b]$:

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \& \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ограничена, а значит, по теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\{x'_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Обозначим $c = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_{m_n} \in [a,b]$. В силу непрерывности:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_{m_n}) = f(c).$$

Рассмотрим также подпоследовательность: $\{x''_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Поскольку

$$|x'_{m_n} - x''_{m_n}| < 1/m_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

то $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_{m_n} = c$, и потому:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x''_{m_n}) = f(c).$$

Тогда имеем:

$$|f(x'_{m_n}) - f(x''_{m_n})| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

а это противоречит условию $|f(x'_{m_n}) - f(x''_{m_n})| \geq \varepsilon$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема Кантора дает только достаточные условия равномерной непрерывности. Необходимыми они не являются.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда:*

1) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$;

2) функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своих наибольшего и наименьшего значения, т.е.: $\exists c, d \in [a,b]$:

$$f(c) = \min_{[a,b]} f(x), \quad f(d) = \max_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. 1) Покажем, что функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$.

По теореме Кантора функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists\delta > 0 : \ \forall x',\, x'' \in [a,b] : \ |x' - x''| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < 1.$$

Найдем $n \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n} < \delta$, и разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

Тогда

$$|f(x)| - |f(a_0)| \le |f(x) - f(a_0)| < 1, \quad \forall x \in [a_0, a_1],$$
$$|f(x)| - |f(a_1)| \le |f(x) - f(a_1)| < 1, \quad \forall x \in [a_1, a_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|f(x)| - |f(a_{n-1})| \le |f(x) - f(a_{n-1})| < 1, \quad \forall x \in [a_{n-1}, a_n].$$

Следовательно,

$$|f(x)| < 1 + |f(a_0)|, \quad \forall x \in [a_0, a_1],$$
$$|f(x)| < 1 + |f(a_1)|, \quad \forall x \in [a_1, a_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|f(x)| < 1 + |f(a_{n-1})|, \quad \forall x \in [a_{n-1}, a_n].$$

Полагая $A = 1 + \max\{|f(a_0)|; \ldots; |f(a_{n-1})|\}$, получим что $|f(x)| \le A$, $\forall x \in [a,b]$, что означает ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

2) Покажем, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своего максимума (для минимума все аналогично).

Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. От противного, предположим, что $\nexists \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Это означает, что $f(x) < M$, $\forall x \in [a,b]$. Построим функцию

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Она непрерывна на отрезке $[a,b]$, а следовательно, по уже доказанному пункту 1) — ограничена на этом отрезке. Значит, $\exists L > 0$: $g(x) < L$, $\forall x \in [a,b]$. Отсюда находим, что

$$f(x) < M - \frac{1}{L}, \quad \forall x \in [a,b],$$

а это противоречит определению супремума. Теорема доказана.

ГЛАВА III. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 4. Непрерывные функции (продолжение)

Теорема (Больцано — Коши о промежуточных значениях функции). *Пусть функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого числа d, лежащего между значениями $f(a)$ и $f(b)$, можно указать такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = d$ (см. рисунок 2).*

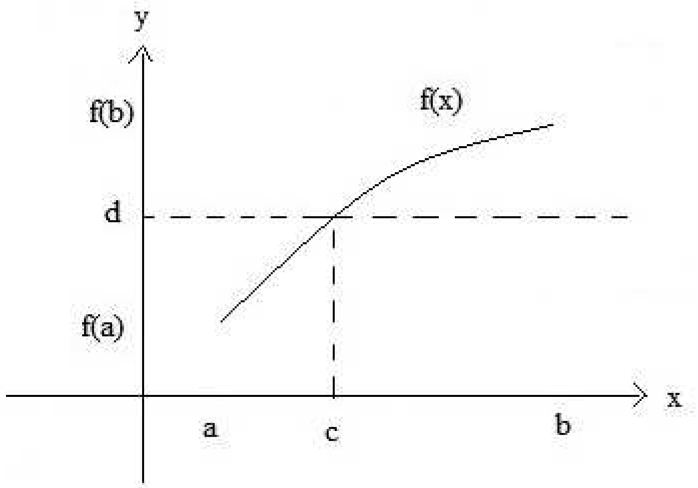

Рис. 2.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ (иначе, все аналогично). Выберем произвольное d: $f(a) < d < f(b)$. От противного, предположим, что $\nexists x \in [a, b]$: $f(x) = d$. Построим функцию

$$h(x) = \frac{1}{|d - f(x)|}.$$

Она непрерывна на отрезке $[a, b]$, а значит, по теореме Вейерштрасса, ограничена там, т.е. $\exists M > 0$: $h(x) < M$, $\forall x \in [a, b]$. Тогда

$$|d - f(x)| > \frac{1}{M}, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$

По теореме Кантора, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Положим $\varepsilon = 1/M$. Получим:

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x',\, x'' \in [a, b] : \ |x' - x''| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \frac{1}{M}.$$

Найдем $n \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n} < \delta$, и разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

Тогда

$$|f(a_k) - f(a_{k-1})| < \frac{1}{M}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что $\exists m \in \{1, \ldots, n\}$: $f(a_{m-1}) < d < f(a_m)$. Отсюда:

$$0 < d - f(a_{m-1}) < f(a_m) - f(a_{m-1}) < \frac{1}{M},$$

а это противоречит условию (1). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда областью значений функции $f(x)$ на $[a, b]$ является отрезок $[m, M]$.*

Следствие (теорема Больцано — Коши о нуле функции). *Пусть функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда можно указать такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = 0$.*

Теорема (о непрерывности обратной функции). *Пусть функции $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и взаимно-однозначна там. Тогда ее обратная функция $x = f^{(-1)}(y)$ будет непрерывной на отрезке $[m, M]$, где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$.*

Доказательство. По теореме Больцано — Коши, отрезок $[m, M]$ является областью значений для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и областью определения для функции $x = f^{(-1)}(y)$. Выберем $\forall d \in [m, M]$. Покажем, что функция $x = f^{(-1)}(y)$ непрерывна в точке d.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \in [m, M]$: $y_n \to d$ при $n \to +\infty$. Надо доказать, что $f^{(-1)}(y_n) \to f^{(-1)}(d)$ при $n \to +\infty$.

Имеем: $\exists x_n \in [a, b]$: $f(x_n) = y_n$, и $\exists c \in [a, b]$: $f(c) = d$. Получаем, что $f(x_n) \to f(c)$ при $n \to +\infty$. Надо доказать, что $x_n \to c$ при $n \to +\infty$.

Предположим, что $x_n \not\to c$ при $n \to +\infty$. Тогда найдется такая сходящаяся подпоследовательность $\{x_{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$, что $x_{m_n} \to c' \neq c$ при $n \to +\infty$.

С учетом непрерывности функции $f(x)$ отсюда следует, что $f(x_{m_n}) \to f(c')$ при $n \to +\infty$. Но поскольку $f(x_n) \to f(c)$ при $n \to +\infty$, то $f(c') = f(c)$. Значит, в силу взаимной однозначности функции, находим, что $c' = c$. Полученное противоречие говорит о том, что $x_n \to c$ при $n \to +\infty$. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для того, чтобы она была взаимно-однозначной на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была строго монотонной на этом отрезке.*

Доказательство. *Достаточность* — очевидна. Покажем *необходимость*. Пусть функция $f(x)$ взаимно-однозначна на отрезке $[a, b]$. Предположим для определенности, что $f(a) < f(b)$ (иначе, все аналогично). Покажем тогда, что функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Выберем $\forall x$: $a < x < b$. Предположим, что $f(x) < f(a)$. Тогда по теореме Больцано — Коши: $\exists \tilde{x} \in (x, b)$: $f(\tilde{x}) = f(a)$, а это противоречит взаимной однозначности функции $f(x)$. Аналогично показывается, что не может иметь места условие: $f(x) > f(b)$. Таким образом, имеем: $f(a) < f(x) < f(b)$.

По той же самой схеме получаем, что:

$$\forall x',\, x'' \in (a, b) : \ x' < x'' \ \Rightarrow \ f(x') < f(x'').$$

Установили требуемое. Теорема доказана.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a. Тогда говорят, что она терпит разрыв в этой точке.*

Определение. *1) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, причем*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a),$$

то тогда точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$ (на графике функции будет выколотая точка).

2) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, причем

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то тогда точка a называется точкой разрыва 1-ого рода функции $f(x)$ (говорят, что функция совершает в этой точке конечный скачок).

3) Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $\pm\infty$ или вообще несуществует, то тогда точка a называется точкой разрыва 2-ого рода функции $f(x)$.

Пример. 1) Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке 0 имеет устранимый разрыв. Если доопределить функцию, положив $f(0) = 1$, то получим непрерывную функцию.

2) Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке 0 имеет разрыв 1-ого рода (функция совершает скачок величины 2).

3) Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке 0 имеет разрыв 2-ого рода (функция совершает бесконечный скачок).

4) Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке 0 имеет разрыв 2-ого рода (здесь оба односторонних предела в точке 0 не существуют).

Пример. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

имеет разрыв 2-ого рода в каждой точке.

Пример. Функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если} \quad x = \frac{m}{n}, \quad \text{где} \quad \frac{m}{n} \ - \text{ несократимая дробь}, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

непрерывна во всех иррациональных точках, и имеет разрывы 1-ого рода во всех рациональных точках.

Теорема. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то она может на этом отрезке иметь только разрывы 1-ого рода.*

Доказательство. Рассмотрим $\forall x_0 \in (a, b)$. В силу монотонности, пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и конечны. Если они равны (значению $f(x_0)$), то тогда x_0 — точка непрерывности функции $f(x)$. В противном случае, получим разрыв 1-ого рода. Теорема доказана.

Следствие. *Число разрывов монотонной функции на отрезке $[a, b]$ не более, чем счетно (конечно или счетно).*

Доказательство. Пусть, для определенности, функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$ (для убывающей функции все аналогично). Пусть $x_0 \in [a, b]$ — точка разрыва функции $f(x)$. Согласно доказанной теореме, это точка разрыва 1-ого рода (там функция совершает конечный скачок). Обозначим через E_k — множество точек разрыва функции, в которых величина скачка больше $\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Каждое множество E_k конечно (оно состоит не более, чем из $k(f(b) - f(a))$ точек). Тогда множество всех точек разрыва:

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$$

не более, чем сетно. Следствие доказано.

§ 5. Комплексные функции

Пусть задана функция $f(z)$, где $z \in Z \subset \mathbb{C}$.

Определение. *Пусть z_0 — предельная точка области Z. Комплексное число w называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 ($w = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), если:*

$$\forall \{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \in Z: \lim_{n \to +\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(z_n) = w,$$

или, что то же самое:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0: \ \forall z \in Z: \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Здесь под модулем понимается модуль комплексного числа.

Теорема. *Пусть $w = a + ib$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $a, b, u(z), v(z) \in \mathbb{R}$. Тогда:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} u(z) = a \ \& \ \lim_{z \to z_0} v(z) = b.$$

Определение. *Пусть $z_0 \in Z$. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в области Z, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

Теорема. *Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$. Тогда для того чтобы функция $f(z)$ была непрерывной в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции $u(z)$ и $v(z)$.*

Многие теоремы, доказанные ранее для вещественных функций, переносятся на комплексные функции.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, и пусть a — внутренняя точка множества X. Зададим приращение h аргумента в этой точке и найдем соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta f = f(a+h) - f(a).$$

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h},$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке a (обозначают производную $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}\big|_{x=a}$).

Определение. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке a, то тогда она называется дифференцируемой в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке множества X, то тогда она называется дифференцируемой на X.*

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{h\to +0} \frac{\Delta f}{h},$$

то он называется правой производной функции $f(x)$ в точке a (обозначают $f'_+(a)$). Аналогично, Если существует конечный предел

$$\lim_{h\to -0} \frac{\Delta f}{h},$$

то он называется левой производной функции $f(x)$ в точке a (обозначают $f'_-(a)$).

Ясно, что для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке a необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема и слева, и справа в этой точке, и при этом имело место условие $f'_+(a) = f'_-(a)$.

Пример. Пусть $f(x) = |x|$, $a = 0$. Тогда

$$f'_+(0) = \lim_{h\to +0} \frac{|h+0| - |0|}{h} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{h\to -0} \frac{|h+0| - |0|}{h} = -1.$$

Получаем, что рассматриваемая функция имеет левую и правую производные в точке 0, но они не равны друг другу. Значит, функция не дифференцируема в данной точке.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Возьмем точку $a = 0$. Заданная функция непрерывна в этой точке, но при этом $\nexists f'_-(0)$, $\nexists f'_+(0)$, и соответственно, $\nexists f'(0)$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, то тогда она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{h\to 0}\Delta f = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}h = f'(a)\lim_{h\to 0}h = 0.$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Заметим, что непрерывность — это только необходимое условие дифференцируемости, но не достаточное (см. примеры выше).

Рассмотрим геометрический смысл производной.

Возьмем точки $M_0 = (a, f(a))$, $M = (a+h, f(a+h))$, лежащие на графике функции $y = f(x)$ (см. рисунок 1) и проведем через ник прямую (секущую). Тогда получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{h},$$

где α — угол, который образует секущая с осью Ox.

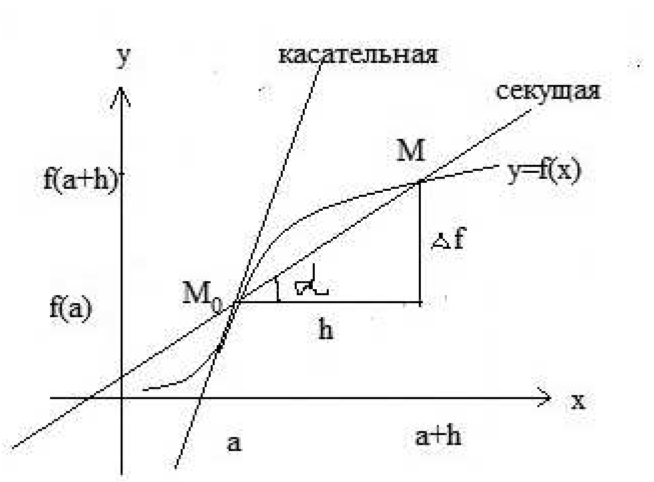

Рис. 1.

Устремим $h \to 0$. Тогда получим, что $M \to M_0$, и секущая в итоге займет некоторое предельное положение. Данное предельное положение секущей называется касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$. Обозначая через $\hat{\alpha}$ — угол между касательной и осью Ox, получим

$$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = f'(a).$$

Таким образом, значение производной функции в заданной точке равно тангенсу угла наклона касательной в данной точке к оси Ox. Если функция дифференцируема в точке a, то тогда у графика функции в данной точке существует касательная, и кривая в этом случае называется гладкой в соответствующей точке.

Например, как было показано ранее, функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке 0. Значит, она не гладкая в этой точке (касательная там не существует). Точку $x = 0$ можно назвать тогда точкой излома функции.

Пусть кривая $y = f(x)$ — гладкая в точке a. Составим уравнение касательной

$$y = kx + p$$

к кривой в заданной точке. Подставляя в уравнение этой прямой координаты точек M_0 и M, и переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$k = f'(a), \qquad p = f(a) - af'(a),$$

т.е. уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная касательной. Уравнение нормали имеет вид:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

если $f'(a) \neq 0$, и

$$x = a,$$

если $f'(a) = 0$.

Рассмотрим теперь физический смысл производной.

Пусть функция $f(x)$ задает длину пути, пройденного за промежуток времени $[0, x]$. Выберем некоторое значение аргумента $x = a$, зададим приращение h аргумента в этой точке. Тогда величина $\Delta f = f(a + h) - f(a)$ будет равна длине пройденного пути за промежуток времени $[a, a + h]$, и следовательно, отношение $\frac{\Delta f}{h}$ будет определять среднюю скорость движения на указанном промежутке. Переходя к пределу при $h \to 0$, получим, что величина производной $f'(a)$ будет определять мгновенную скорость движения в точке a.

Таким образом, производная характеризует скорость изменения функции в заданной точке.

Замечание. Если

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \pm\infty,$$

то можно ввести понятие бесконечной производной ($f'(a) = \pm\infty$). Геометрически это будет означать, что касательная к графику в данной точке перпендикулярна к оси Ox ($\hat{\alpha} = \frac{\pi}{2}$), а физически это будет означать, что в точке a функция имеет бесконечную скорость изменения.

§ 2. Правила вычисления производной

Теорема (производные элементарных функций). *Верно:*

1) $(C)' = 0$ *(*$C = \text{const}$*);*

2) $(x^a)' = ax^{a-1}$ *(*$a = \text{const}$*);*

3) $(a^x)' = a^x \ln a$ *(*$a = \text{const} > 0$*),* $(e^x)' = e^x$*;*

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ *(*$a = \text{const} > 0$*,* $a \neq 1$*),* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$*;*

5) $(\sin x)' = \cos x$*,* $(\cos x)' = -\sin x$*,* $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$*,* $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$*;*

6) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*,* $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$*;*

7) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$*,* $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$*.*

Докажем только некоторые из приведенных формул. В остальных случаях доказательство аналогично. Кроме того, вывод многих из этих формул удобнее осуществлять с задействованием результатов, которые будут получены далее. Имеем

$$(C)' = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0;$$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}} = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x.$$

Теорема (арифметические свойства производных). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда:*

1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;

2) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$;

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

4) если $g(x)\neq 0$, то

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство. 1) Получаем

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

2) Все аналогично.

3) В данном случае имеем

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h))+(f(x)g(x+h)-f(x)g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

4) Найдем сначала

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Тогда

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда:*

1) $(f(x)+C)' = f'(x)$ ($C = \mathrm{const}$);

2) $(Cf(x))' = Cf'(x)$ ($C = \mathrm{const}$).

Пример. Найдем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Лемма. *Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x необходимо и достаточно, чтобы ее приращение можно было представить в виде:*

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = Ah + o(h),$$

где $A = \mathrm{const}$ (зависящая, вообще говоря, от точки x, но не зависящая от h).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Обозначим

$$\alpha(h) = \Delta f - f'(x)h.$$

Тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} - f'(x) = 0,$$

т.е. $\alpha(h) = o(h)$. Получили требуемое представление, где $A = f'(x)$.

Достаточность. Пусть верно указанное представление приращения функции. Тогда

$$\frac{\Delta f}{h} = A + \frac{o(h)}{h}.$$

Устремим $h \to 0$. Правая часть имеет предел, значит, и левая тоже должна иметь предел. Снова получаем, что $f'(x) = A$. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы следует, что дтфференцируемость функции $f(x)$ в точке x эквивалентна возможности представить приращение этой функции в виде

$$\Delta f = f'(x)h + o(h).$$

Таким образом, это можно рассматривать, как второе определение дифференцируемости функции одной переменной. Оно хорошо тем, что допускает распространение на случай функции нескольких переменных.

Теорема (производная сложной функции). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y = f(x)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ будет дифференцируемой в точке x, причем*

$$\Big(g(f(x))\Big)' = g'(f(x))f'(x).$$

Доказательство. Зададим аргументу x приращение h. Найдем приращение функции $f(x)$. Получим

$$\Delta f = f(x+h) - f(x).$$

В то же время величина Δf будет являться приращением аргумента функции $g(y)$ в точке $y = f(x)$. А приращение этой функции в данной точке будет иметь вид:

$$\Delta g = g(f(x) + \Delta f) - g(f(x)).$$

Согласно предыдущей лемме, имеем

$$\Delta g = g'(f(x))\Delta f + o(\Delta f).$$

Тогда

$$\Big(g(f(x))\Big)' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta g}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(f(x))\Delta f + o(\Delta f)}{h} =$$

$$= g'(f(x))\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{o(\Delta f)}{\Delta f}\frac{\Delta f}{h} = g'(f(x))f'(x).$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислим

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin(2x).$$

Пример. Найдем

$$(x^x)' = \big(e^{x\ln x}\big)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1).$$

Доказанные выше теоремы позволяют вычислять производные от простейших функций.

Теорема (производная обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена, взаимно-однозначна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда ее обратная функция $x = f^{-1}(y)$ будет дифференцируема на отрезке $[m, M]$ (где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$), причем*

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказательство. Пусть h — приращение аргумента x, а k — соответствующее ему приращение аргумента y. Тогда

$$k = f(x+h) - f(x), \qquad h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y).$$

По теореме о непрерывности обратной функции имеем, что условие $h \to 0$ эквивалентно условию $k \to 0$. Получаем

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Символически можно записать

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{dx}{dy}.$$

Пример. Пусть $y = e^x$. Тогда $x = \ln y$. Имеем

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = y = e^x.$$

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления (продолжение)

Теорема (достаточное условие локального экстремума функции). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки c, причем $f'(c) = 0$. Тогда если существует $\delta > 0$, такое что:*

1) $f'(x) < 0$ при $x \in [c-\delta, c)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (c, c+\delta]$, то c — точка локального минимума функции $f(x)$;

2) $f'(x) > 0$ при $x \in [c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (c, c+\delta]$, то c — точка локального максимума функции $f(x)$;

3) $f'(x) < 0$ при $x \in [c-\delta, c) \cup (c, c+\delta]$ или $f'(x) > 0$ при $x \in [c-\delta, c) \cup (c, c+\delta]$, то c — не является точкой локального экстремума.

Доказательство. Рассмотрим случай 1) (в остальных случаях доказательство аналогично). Функция $f(x)$ строго убывает на промежутке $[c-\delta, c]$ и строго возрастает на промежутке $[c, c+\delta]$. Значит,

$$\forall x_1 \in [c-\delta, c),\ \forall x_2 \in (c, c+\delta] \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(c) < f(x_2).$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Отметим, что сформулированная теорема задает только достаточные условия экстремума, но не необходимые.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin(1/x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема при $x \in (-\infty, +\infty)$, причем

$$f(x) \geq x^2 \geq 0.$$

Значит,

$$\min_{(-\infty,+\infty)} f(x) = f(0),$$

т.е. точка $x = 0$ является точкой локального и глобального минимума. В то же время, производная

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию 1) предыдущей теоремы (указанное достаточное условие теоремы не выполнено).

Полученные выше результаты можно использовать для доказательства различных неравенств.

Пример. Докажем, что

$$x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Построим функцию

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x.$$

Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Значит, функция $f(x)$ строго возрастает на интервале $[0, \frac{\pi}{2})$. Таким образом,

$$\min_{[0,\frac{\pi}{2})} f(x) = f(0) = 0,$$

и соответственно,

$$f(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Установили требуемое.

Докажем теперь, что

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Введем функцию

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Имеем

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Значит, функция $g(x)$ строго убывает на интервале $(0, \frac{\pi}{2}]$. Таким образом,

$$\min_{(0,\frac{\pi}{2}]} g(x) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi},$$

и соответственно,

$$g(x) > \frac{2}{\pi} \quad \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Снова получили требуемое.

Пример. Найдем глобальные экстремумы функции

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$$

на промежутке $[-3, 2]$. Данная функция непрерывна и дифференцируема на указанном промежутке, причем

$$f'(x) = (x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

Имеем:

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [-3,-2) \cup (-\frac{4}{5}, 1) \cup (1, 2],$$

и

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (-2, -\frac{4}{5}).$$

Значит, функция $f(x)$ строго возрастает на промежутках $[-3,-2]$ и $[-\frac{4}{5}, 2]$, и она строго убывает на промежутке $[-2, -\frac{4}{5}]$. Согласно, рассмотренной выше теореме, $x = -2$ — точка локального максимума, $x = -\frac{4}{5}$ — точка локального минимума, а $x = 1$ — не является точкой локального экстремума. При этом

$$f(-2) = 0, \quad f(-\frac{4}{5}) \approx -8,4.$$

Отметим также, что глобальные экстрмумы могут достигаться на концах заданного промежутка. Поскольку
$$f(-3) = -64, \quad f(2) = 16,$$
то получаем
$$\min_{[-3,2]} f(x) = f(-3), \quad \max_{[-3,2]} f(x) = f(2).$$

Пример. Исследуем теперь вопрос с экстремумами для функции
$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$$
на промежутке $[-3, 2]$.

Поскольку производная
$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2}$$
может принимать только положительные значения, то может сложиться впечатление, что
$$\min_{[-3,2]} f(x) = f(-3) = -4, \quad \max_{[-3,2]} f(x) = f(2) = -\frac{1}{4}.$$
Однако, это не верно. На промежутке $[-3, 2]$ есть точка $x = -2$, в которой функция $f(x)$ терпит разрыв 2-ого рода (соответственно, в этой точке функция не дифференцируема). Поэтому
$$\inf_{[-3-2)\cup(-2,2]} f(x) = \lim_{x\to-2+0} f(x) = -\infty, \qquad \sup_{[-3-2)\cup(-2,2]} f(x) = \lim_{x\to-2-0} f(x) = +\infty.$$
Таким образом, экстремумов функция $f(x)$ на своей области определения не имеет (ни локальных, ни глобальных).

§ 4. Некоторые вспомогательные неравенства

Рассмотрим функцию
$$f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$$
при $x \in (0, +\infty)$. Здесь $\alpha = \mathrm{const}$, причем $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$.

Имеем
$$f'(x) = \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right).$$
Отсюда находим, что $f'(1) = 0$, и при этом:

1) если $0 < \alpha < 1$, то
$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, 1) \quad \text{и} \quad f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > 1,$$
и следовательно, $x = 1$ — точка глобального максимума функции $f(x)$;

2) если $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$, то
$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, 1) \quad \text{и} \quad f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > 1,$$
и следовательно, $x = 1$ — точка глобального минимума функции $f(x)$.

Заметим, что $f(1) = 0$. Таким образом, получаем, что
$$\begin{cases} f(x) \le 0, & \text{если} \quad 0 < \alpha < 1, \\ f(x) \ge 0, & \text{если} \quad \alpha > 0 \quad \text{или} \quad \alpha > 1, \end{cases} \tag{1}$$

причем данные неравенства выполняются строго при $x \neq 1$.

Теорема (неравенства Юнга). *Для любых чисел $a > 0$, $b > 0$ и для любых чисел p и q, таких что*

$$p \neq 0, \quad p \neq 1, \quad q \neq 0, \quad q \neq 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2}$$

справедливы неравенства

$$\begin{cases} a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, & \text{если} \quad p > 1, \\ a^{1/p}b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, & \text{если} \quad p < 1. \end{cases} \tag{3}$$

Для доказательства теоремы достаточно в неравенствах (1) положить

$$x = \frac{a}{b}, \quad \alpha = \frac{1}{p}.$$

Отметим, что согласно условиям (2):

$$p > 1 \ \Leftrightarrow \ q > 1, \qquad p < 1 \ \Leftrightarrow \ q < 1.$$

Равенства в (3) достигаются только при $a = b$.

Теорема (неравенства Гельдера). *Для любых чисел $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, и для любых чисел p и q, удовлетворяющих условиям (2), справедливы неравенства*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}, & \text{если} \quad p > 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}, & \text{если} \quad p < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $p > 1$ (для $p < 1$ все аналогично). Положим

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i^p, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^q.$$

Подставим в неравенства (3) значения:

$$a = \frac{x_i^p}{X}, \quad b = \frac{y_i^q}{Y}.$$

Тогда найдем, что

$$\frac{x_i y_i}{X^{1/p} Y^{1/q}} \leq \frac{x_i^p}{pX} + \frac{y_i^q}{qY}.$$

Просуммируем данное неравенство по всем индексам $i = 1, \dots, n$. Получим

$$\frac{1}{X^{1/p} Y^{1/q}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1.$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Отметим, что если $p > 0$, то в неравенствах (4) можно использовать $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. При этом неравенства (4) обращаются в равенства, только если векторы $(x_1^p, \dots, x_n^p)^T$ и $(y_1^q, \dots, y_n^q)^T$ — пропорциональны.

Пример. Выберем два произвольных вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Положим $p = q = 2$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

т.е.

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|,$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\|\mathbf{x}\|$ — длина вектора $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{y}\|$ — длина вектора $\mathbf{y}$.

Теорема (неравенства Минковского). *Для любых чисел* $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *и для любого числа* $p \neq 0$, *справедливы неравенства*

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}, & \textit{если} \quad p > 1, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}, & \textit{если} \quad p < 1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $p > 1$ (для $p < 1$ все аналогично). Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

Применяя к обоим слагаемым неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/q},$$

где $q = p/(p-1)$. Отсюда приходим к требуемому. Теорема доказана.

Снова отметим, что если $p > 0$, то в неравенствах (5) можно использовать $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Пример. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Положим $p = q = 2$. Тогда неравенство Минковского будет представлять собой неравенство треугольника:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского широко используются в различных практических задачах. Применяя их, можно вывести многие известные алгебраические неравенства.

В частности, неравенство Юнга можно распространить на многомерный случай. Так, нетрудно доказать, что для любых $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и любых $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, таких что $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, верно неравенство

$$a_1^{1/p_1} \ldots a_n^{1/p_n} \leq \frac{a_1}{p_1} + \ldots + \frac{a_n}{p_n}.$$

Возьмем, например, $p_1 = \ldots = p_n = n$. Тогда придем к известному неравенству, связывающему между собой среднее арифметическое и среднее геометрическое нескольких чисел:

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

§ 5. Производные старшего порядка

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию $f'(x)$. Предположим, что она также дифференцируема на X. Тогда ее производная называется второй производной функции $f(x)$. Пишут:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = (f'(x))'.$$

Заметим, что если первая производная характеризует скорость изменения функции, то вторая производная — ускорение (скорость изменения скорости).

Аналогично можно ввести понятие производных и более высокого порядка:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Определение. *Функция $f(x)$ называется n раз дифференцируемой на множестве X, если на этом множестве существует ее n-ая производная $f^{(n)}(x)$. Если при этом данная производная непрерывна на X, то тогда функция $f(x)$ называется n раз непрерывно дифференцируемой на множестве X.*

Введем обозначения: $C(X)$ — множество всех непрывных функций на X (например, $C[a, b]$ — множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$); $C^n(X)$ — множество всех функций, n раз непрерывно дифференцируемых на X (например, $C^n[a, b]$ — множество функций, n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$).

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема при $x \in (-\infty, +\infty)$, причем

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Однако, производная $f'(x)$ терпит разрыв в точке $x = 0$ (соответственно, $\nexists f''(0)$). Таким образом, $f(x) \in C(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — n раз дифференцируемы в точке x. Тогда:*

1) $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$,

2) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ (формула Лейбница).

Доказательство. Доказываем по индукции. При $n = 1$ требуемое вытекает из арифметических свойств производных. Утверждение 1) тривиально. Докажем утверждение 2). Пусть оно верно при $n = m$, т.е.

$$(f(x)g(x))^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)}(x) g^{(m-k)}(x).$$

Возьмем теперь $n = m + 1$. Тогда

$$(f(x)g(x))^{(m+1)} = \left((f(x)g(x))^{(m)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)}(x) g^{(m-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) \right) =$$

$$= f^{(m+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(C_m^{k-1} + C_m^k \right) f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f(x) g^{(m+1)}(x).$$

Нетрудно проверить, что

$$C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k.$$

Тогда имеем требуемое

$$(f(x)g(x))^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x) = xe^x$. Тогда

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \quad f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (2+x)e^x, \quad \ldots.$$

Нетрудно заметить, что

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x.$$

То же самое выражение можно получить, используя формулу Лейбница:

$$f^{(n)}(x) = (xe^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} =$$

$$= C_n^0 x e^x + C_n^1 1\, e^x + C_n^2 0\, e^x + \ldots + C_n^n 0\, e^x = (n+x)e^x.$$

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 5. Производные старшего порядка (продолжение)

Теорема (формула Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ определена и n раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n,$$

где R_n — остаточный член, который может быть представлен в одной из следующих форм:

1) $R_n = o\left((b-a)^{n-1}\right)$ (форма Пеано);

2) $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$, где $c \in (a, b)$ (форма Лагранжа);

3) $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{(n-1)!}h^n(1-\theta)^{n-1}$, где $h = b - a$, $\theta \in (0, 1)$ (форма Коши).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Заметим, что $g(b) = 0$, $g(a) = R_n$.

Продифференцируем функцию $g(x)$. Получим

$$g'(x) = -f'(x) - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) + f'(x) - \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \ldots -$$

$$-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Применим к функции $g(x)$ теорему Лагранжа:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(a + \theta h).$$

Здесь $h = b - a$, $\theta \in (0, 1)$. Тогда имеем

$$-\frac{R_n}{h} = -\frac{(b - a - \theta h)^{n-1} f^{(n)}(a + \theta h)}{(n-1)!},$$

откуда приходим к форме Коши:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{(n-1)!} h^n (1 - \theta)^{n-1}.$$

Положим теперь $u(x) = (b - x)^n$ и применим теорему Коши к функциям $g(x)$ и $u(x)$. Получим

$$\frac{g(b) - g(a)}{u(b) - u(a)} = \frac{g'(c)}{u'(c)}.$$

Здесь $c \in (a, b)$. Отсюда имеем

$$\frac{0 - R_n}{0 - (b-a)^n} = \frac{-f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1}}{-(n-1)!n(b-c)^{n-1}},$$

откуда приходим к форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Форма Пеано вытекает из формы Лагранжа. Теорема доказана.

Замечание. Выпишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 1$. Получим

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a),$$

где $c \in (a, b)$, или, что то же самое,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c),$$

а это есть формула конечных приращений Лагранжа. Таким образом, формула Тейлора является обобщением формулы Лагранжа.

Замечание. Пусть функция $f(x)$ является n раз дифференцируемой в окрестности точки x_0. Тогда, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем, что для любого x из указанной окрестности справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right).$$

Отбрасывая слагаемые порядка малости выше $(n-1)$-ого, имеем аппроксимацию функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 в виде степенного полинома:

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^{n-1}\right) \approx P_n(x)$$

Здесь

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}.$$

Согласно форме Пеано:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0,$$

т.е. $P_n(x)$ — это главная часть функции $f(x)$ (с точностью до слагаемых $(n-1)$-ого порядка малости).

Заметим, что, применяя формулу Тейлора при $n = 2$, получим лемму, сформулированную ранее (перед теоремой о производной сложной функции):

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o\left((x-x_0)\right).$$

Отметим также, что при $x_0 = 0$ формулу Тейлора принято называть формулой Макларэна.

Пример. Выпишем формулу Макларэна для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \qquad (m = \mathrm{const}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Пример. Разложим теперь более сложную функцию $f(x) = e^{\sin x}$ по формуле Макларэна. Имеем

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \left(e^{\sin x}\cos x\right)\Big|_{x=0} = 1,$$

$$f''(0) = \left(e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x\right)\Big|_{x=0} = 1, \quad \ldots,$$

откуда получаем:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

Заметим, что к тому же самому результату можно прийти, применяя стандартные разложения из предыдущего примера:

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \frac{(\sin x)^2}{2} + \ldots =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^2 + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

Однако таким подходом надо пользоваться осторожно, не забывая, в какой точке осуществляется разложение функции. Например, представление

$$e^{1+\sin x} = 1 + (1+\sin x) + \frac{(1+\sin x)^2}{2} + \ldots$$

будет не верным, поскольку выражение $y = 1+\sin x$ не обращается при $x = 0$ в ноль, и потому для функции e^y мы не можем использовать стандартное разложение по Макларэну. Правильно будет сделать так:

$$e^{1+\sin x} = e\, e^{\sin x} = e(1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \ldots).$$

Пример. Вычислим приближенно значение $\ln(1,2)$. Положим $f(x) = \ln(1+x)$. Согласно формуле Макларэна, имеем

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Значит,

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} \approx 0,182.$$

Задействуя в формуле Макларэна слагаемые большего порядка малости, можно вычислить указанное значение с любой требуемой степенью точности. Погрешность вычислений (остаточный член) можно оценить с использованием форм Лагранжа или Коши.

Формулу Тейлора можно применять для вычисления пределов, заменяя сложные функции эквивалентными полиномами в окрестности предельной точки.

Пример. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)-x}{x^3} = -\frac{1}{3!}.$$

Замечание. Поскольку разложения многих элементарных функций в ряд Макларэна хорошо известны, то для их использования при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ часто бывает удобно сделать замену переменной $y = x - a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to 0} f(a+y).$$

Тогда для функции $f(a+y)$ можно задействовать формулу Макларэна (естественно при условии дифференцируемости нужное число раз указанной функции в окрестности точки $y = 0$).

Теорема (первое правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются n раз непрерывно дифференцируемыми в окрестности точки a, причем*

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0, \qquad g^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Доказательство. Согласно формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа), для любого x из окрестности точки a имеем

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(x-a)^n =$$

$$= \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(x-a)^n,$$

$$g(x) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{g^{(n)}(a+\theta_2(x-a))}{n!}(x-a)^n =$$

$$-\frac{g^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

Здесь $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Отсюда получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{g^{(n)}(a+\theta_2(x-a))} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Теорема доказана.

Пример. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Пример. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Пример. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Замечание. Правило Лопиталя можно применять и в случае, когда в самой точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой выколотой окрестности точки a (в точках, близких к точке a, но отличных от нее), причем там $g'(x)\neq 0$, и

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Тогда если $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=I$, то $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=I$. При этом значение I может быть как конечным, так и бесконечным.

В самом деле, доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a. Положим

$$f(a)=g(a)=0.$$

Тогда по теореме Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))},$$

где $\theta\in(0,1)$. Переходя к пределу при $x\to a$, получим требуемое.

Отметим, что если предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, ни конечного, ни бесконечного, то правило Лопиталя применять нельзя (предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ в этом случае может как существовать, так и не существовать).

Замечание. Правило Лопиталя можно применять и для вычисления односторонних пределов. В частности, его можно использовать в случае, когда $a=\infty$ (здесь под бесконечностью понимается $+\infty$ или $-\infty$). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности этой бесконечной точки, причем там $g'(x)\neq 0$, и

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0.$$

Тогда если $\exists\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=I$ (конечный или бесконечный), то $\exists\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=I$.

Для доказательства данного факта достаточно при вычислении предела сделать замену переменных $x=1/t$. Тогда стремление $x\to\pm\infty$ будет эквивалентно стремлению $t\to\pm 0$.

Теорема (второе правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой выколотой окрестности точки a, причем там $g'(x)\neq 0$, и*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty.$$

Тогда если $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=I$ (конечный или бесконечный), то $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=I$.

Для доказательства теоремы при $I\neq\infty$ достаточно воспользоваться тождеством

$$\frac{f(x)}{g(x)}-I=\frac{f(c)-Ig(c)}{g(x)}+\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}-I\right),$$

справедливым при любом значении c из рассматриваемой окрестности точки a, и применить теорему Коши.

Для доказательства случая $I = \infty$ достаточно "перевернуть" предел.

Пример. Пусть $m = \text{const} > 0$. Найдем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{mx^{m-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{mx^m} = 0.$$

Пример. Заметим, что предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

существует. Однако, если его пытаться вычислить по правилу Лопиталя, то придем к несуществующему пределу

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\cos x).$$

Таким образом, правило Лопиталя здесь не применимо (предел отношения производных не существует).

Как уже отмечалось ранее, правило Лопиталя — это непрерывный аналог теоремы Штольца.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 6. Выпуклость/вогнутость функций

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется выпуклой на отрезке $[a, b]$ (или иначе, выпуклой вниз), если для $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется в противоположную сторону ($\geq$), то тогда Функция $f(x)$ называется вогнутой на отрезке $[a, b]$ (или иначе, выпуклой вверх).

Выпуклость (вогнутость) функции на отрезке означает, что на этом отрезке любая хорда, соединяющая две точки на графике функции, будет лежать выше (ниже) графика функции (см. рисунок 1).

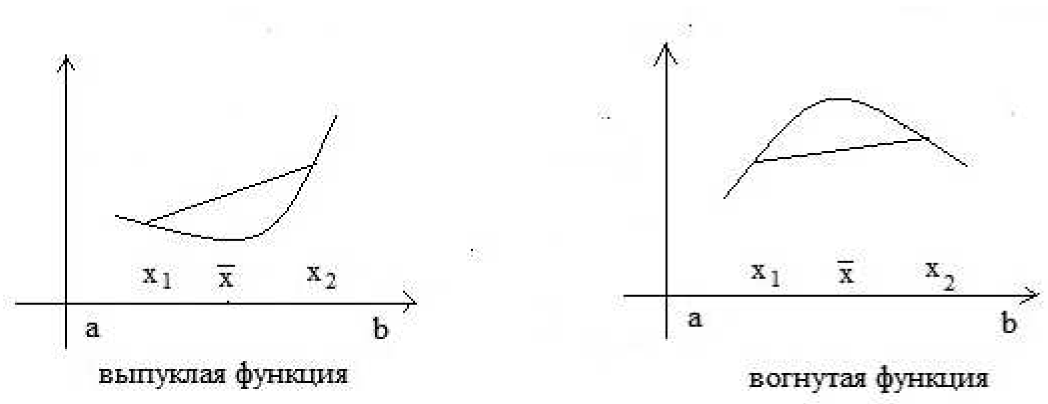

Рис. 1.

Свойства выпуклых/вогнутых функций:

1) У любой выпуклой (вогнутой) на $[a, b]$ функции, не равной тождественно константе, на интервале (a, b) не может быть локальных максимумов (минимумов).

2) Сумма выпуклых (вогнутых) на $[a, b]$ функций — есть выпуклая (вогнутая) на $[a, b]$ функция.

3) Умножение функции на положительную константу сохраняет свойство выпуклости/вогнутости, а умножение на отрицательную константу меняет это свойство на противоположное.

4) Имеют место условия:

а) если функция $\varphi(u)$ — выпукла и монотонно возрастающая, а функция $f(x)$ — выпукла, то тогда функция $\varphi(f(x))$ — выпукла;

б) если функция $\varphi(u)$ — выпукла и монотонно убывающая, а функция $f(x)$ — вогнута, то тогда функция $\varphi(f(x))$ — выпукла;

в) если функция $\varphi(u)$ — вогнута и монотонно возрастающая, а функция $f(x)$ — вогнута, то тогда функция $\varphi(f(x))$ — вогнута;

г) если функция $\varphi(u)$ — вогнута и монотонно убывающая, а функция $f(x)$ — выпукла, то тогда функция $\varphi(f(x))$ — вогнута.

5) Пусть функция $y = f(x)$ взаимно-однозначна на отрезке $[a, b]$. Тогда:

а) если функция $y = f(x)$ — выпукла и монотонно возрастающая, то тогда функция $x = f^{-1}(y)$ — вогнута и монотонно возрастающая;

б) если функция $y = f(x)$ — выпукла и монотонно убывающая, то тогда функция $x = f^{-1}(y)$ — выпукла и монотонно убывающая;

в) если функция $y = f(x)$ — вогнута и монотонно убывающая, то тогда функция $x = f^{-1}(y)$ — вогнута и монотонно убывающая.

Теорема (неравенство Йенсена). *Если функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на отрезке $[a,b]$, то тогда для $\forall x_1,\dots,x_n \in [a,b]$, $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in [0,1]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, будет выполнено неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \quad \text{(\textit{для выпуклой функции})}$$

или

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \quad \text{(\textit{для вогнутой функции})}.$$

Доказательство. Доказываем методом математической индукции для выпуклой функции (для вогнутой все аналогично). При $n = 2$ неравенство Йенсена принимает вид (1). Пусть теорема верна для $n = m-1$. Покажем, что тогда она будет верна для $n = m$. Выберем $\forall x_1,\dots,x_m \in [a,b]$, $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_m \in [0,1]$: $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Константы $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ не могут одновременно быть равными нулю. Пусть для определенности $\lambda_m \ne 0$. Положим $\beta = \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$. Имеем $\beta > 0$, $\lambda_1 + \beta = 1$, и

$$\frac{\lambda_2}{\beta} + \ldots + \frac{\lambda_m}{\beta} = 1.$$

С учетом индуктивного предположения получаем

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m) = f\left(\lambda_1 x_1 + \beta\left(\frac{\lambda_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\lambda_m}{\beta}x_m\right)\right) \le$$

$$\le \lambda_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\lambda_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\lambda_m}{\beta}x_m\right) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i).$$

Теорема доказана.

Пример. Функция $f(x) = \ln x$ — вогнута на интервале $(0,+\infty)$. Значит, для $\forall x_1,\dots,x_n \in (0,+\infty)$, $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in [0,1]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, получим

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i.$$

Отсюда

$$x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Полагая $\lambda_i = \frac{1}{p_i}$, $i = 1,\dots,n$, где $p_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, и $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$, придем к неравенству Юнга:

$$x_1^{1/p_1} \ldots x_n^{1/p_n} \le \frac{x_1}{p_1} + \ldots + \frac{x_n}{p_n}.$$

Пример. Функция $f(x) = x^p$ — выпукла (при $p > 1$) и вогнута (при $p < 1$) на интервале $(0, +\infty)$. Значит, для $\forall x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p \quad \text{при} \quad p > 1,$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p \quad \text{при} \quad p < 1.$$

Полагая $q = p/(p-1)$, $\lambda_i = b_i^q \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{-1}$, $x_i = a_i b_i^{-1/(p_i - 1)} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q$, где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, придем к неравенству Гельдера:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}, & \text{если} \quad p > 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}, & \text{если} \quad p < 1. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для того чтобы эта функция была выпуклой (вогнутой) на данном отрезке необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная там монотонно возрастала (убывала).*

Доказательство. Доказываем теорему для выпуклой функции (для вогнутой все аналогично).

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$. Тогда выполняется условие (1). Предположим, что $x_1 < x_2$, $\lambda \in (0, 1)$. Обозначим $\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$. Тогда $x_1 < \bar{x} < x_2$,

$$\lambda = \frac{x_2 - \bar{x}}{x_2 - x_1}, \qquad (1 - \lambda) = \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1},$$

и условие (1) примет вид

$$f(\bar{x}) \leq \frac{x_2 - \bar{x}}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

что, в свою очередь, можно переписать так:

$$\frac{f(\bar{x}) - f(x_1)}{\bar{x} - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\bar{x})}{x_2 - \bar{x}}. \tag{2}$$

Устремляя $\lambda \to 1$, получим $\bar{x} \to x_1$, и из соотношения (2) тогда найдем, что

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Наоборот, устремляя $\lambda \to 0$, получим $\bar{x} \to x_2$, и из соотношения (2) тогда найдем, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Значит, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, т.е. первая производная монотонно возрастает.

Достаточность. Выберем произвольные $x_1, \bar{x}, x_2 \in [a,b]$: $x_1 < \bar{x} < x_2$. По теореме Лагранжа: $\exists c_1 \in (x_1, \bar{x})$, $\exists c_2 \in (\bar{x}, x_2)$:

$$\frac{f(\bar{x}) - f(x_1)}{\bar{x} - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(\bar{x})}{x_2 - \bar{x}} = f'(c_2).$$

Пусть производная $f'(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Значит, выполнено неравенство (2), а следовательно, и (1). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для того чтобы эта функция была выпуклой (вогнутой) на данном отрезке необходимо и достаточно, чтобы там выполнялось условие $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).*

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для того чтобы эта функция была выпуклой (вогнутой) на данном отрезке необходимо и достаточно, чтобы любая касательная к ее графику на этом отрезке лежала ниже (выше) графика (см. рисунок 2).*

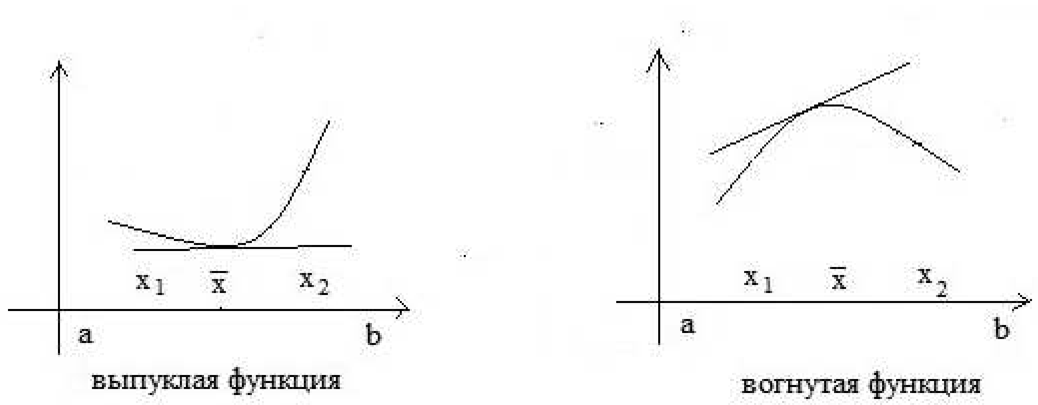

Рис. 1.

Доказательство. Доказываем теорему для выпуклой функции (для вогнутой все аналогично). Выберем поизвольное $c \in (a,b)$. Запишем уравнение касательной в этой точке:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Нахождение этой касательной ниже графика функции означает, что для $\forall x \in [a,b]$ выполнено неравенство:

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c),$$

что эквивалентно условиям:

$$f'(c) \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{при} \quad x > c, \tag{3}$$

$$f'(c) \geq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{при} \quad x < c. \tag{4}$$

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a,b]$. Тогда верны условия (1) и (2). Если положить $x_2 = x$, $\bar{x} = c$, $x_1 \to \bar{x}$, то соотношение (2) превратится в (3). Если же положить $x_1 = $, $\bar{x} = x$, $x_2 \to \bar{x}$, то соотношение (2) превратится в (4).

Достаточность. Выберем произвольные $x_1, x_2 \in (a,b)$: $x_1 < x_2$. В (3) положим $x = x_2$, $c = x_1$, а в (4) положим $x = x_1$, $c = x_2$. Тогда получим

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Значит производная $f'(x)$ монотонно возрастает на $[a,b]$, а тогда по предыдущей теореме получаем требуемое.

Теорема доказана.

Определение. *Точка c называется точкой перегиба функции $f(x)$, если в этой точке функция меняет свойство выпуклости/вогнутости на противоположное, т.е. можно указать такое $\delta > 0$, что на отрезке $[c-\delta, c]$ функция выпукла, а на отрезке $[c, c+\delta]$ — вогнута, или наоборот.*

Теорема (необходимое условие для точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки c. Тогда для того чтобы эта точка была точкой перегиба необходимо, чтобы выполнялось условие $f''(c) = 0$.*

Заметим, что это только необходимое условие, но не достаточное. Например, пусть $f(x) = x^4$. Тогда $f''(0) = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой перегиба (рассматриваемая функция выпукла на всей оси $(-\infty, +\infty)$).

Теорема (достаточное условие для точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки c. Тогда для того чтобы эта точка была точкой перегиба достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ в этой точке меняла знак с "+" на "-", или наоборот.*

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и n раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки c, причем*

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0, \qquad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n — четное и $f^{(n)}(c) > 0$, то c — точка локального минимума функции $f(x)$;

2) если n — четное и $f^{(n)}(c) < 0$, то c — точка локального максимума функции $f(x)$;

3) если n — нечетное, то c — точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. 1) Зададим приращение h аргумента в точке c. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!} h^n,$$

где $\theta \in (0,1)$. Тогда для любых достаточно малых по модулю значений h получаем

$$\Delta f = f(c+h) - f(c) > 0,$$

следовательно, c — точка локального минимума.

2) Аналогично.

3) Пусть n — нечетное. Предположим для определенности, что $f^{(n)}(c) > 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x) > 0$ при $x \in [c-\delta, c+\delta]$. Значит, функция $f^{(n-1)}(x)$ строго возрастает на промежутке $[c-\delta, c+\delta]$. С учетом того, что $f^{(n-1)}(c) = 0$ получаем, что $f^{(n-1)}(x) < 0$ при $x \in [c-\delta, c)$, и $f^{(n-1)}(x) > 0$ при $x \in (c, c+\delta]$. Следовательно, функция $f^{(n-2)}(x)$ строго убывает на промежутке $[c-\delta, c]$, и строго

возрастает на промежутке $[c, c+\delta]$. С учетом того, что $f^{(n-2)}(c) = 0$, получаем, что $f^{(n-2)}(x) > 0$ при $x \in [c-\delta, c) \cup (c, c+\delta]$. Продолжая этот процесс, и принимая во внимание нечетность n, получим, что $f''(x) < 0$ при $x \in [c-\delta, c)$, и $f''(x) > 0$ при $x \in (c, c+\delta]$. Следовательно, c — точка перегиба.

Теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = n! > 0.$$

Значит, при четном n точка $x = 0$ — точка локального (и как нетрудно заметить, что и глобального) минимума, а при нечетном n точка $x = 0$ — точка перегиба.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 7. Исследование функции и построение графика

График функции должен отражать качественные особенности поведения функции. Для построения графика обычно проводят исследование, включающее в себя следующие стандартные этапы:

1) Установление области определения функции.

2) Анализ непрерывности функции и исследование поведения функции в окрестности ее точек разрыва.

3) Анализ дифференцируемости функции.

4) Выявление специфических свойств функции (наличие четности/нечетности, периодичности).

5) Вычисление значения функции в каких-то характерных точках (например, нахождение точек пересечения с осями координат).

6) Нахождение промежутков монотонности функции и поиск экстремумов.

7) Нахождение промежутков выпуклости/вогнутости функции и поиск точек перегиба.

8) Проверка наличия асимптот у графика функции.

Рассмотрим более детально пункт 8) данного плана исследования.

Определение. *Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв 2-ого рода (хотя бы один из ее односторонних пределов в данной точке равен $+\infty$ или $-\infty$). Тогда прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции.*

Определение. *Прямая $y = ax + b$ называется правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $f(x)$, если*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0\right).$$

Нетрудно проверить, что если у графика функции $f(x)$ существует наклонная асимптота $y = ax + b$, то

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)\,.$$

Здесь пределы вычисляются при $x \to +\infty$ для правой наклонной асимптоты, и при $x \to -\infty$ — для левой.

Если у графика есть наклонная асимптота (левая или правая), то желательно определить характер приближения графика функции к ней (сверху, снизу или колеблясь вокруг нее).

Пример. Проведем исследование и построим график функции

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

1) Область определения: $X = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) Функция $f(x)$ непрерывна на X. Точка $x = -1$ — разрыв 2-ого рода:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1+0} f(x) = -\infty.$$

3) Функция непрерывно-дифференцируема произвольное число раз на X.

4) Свойствами четности/нечетности и периодичности функция не обладает.

5) Пересечение с осью Ox: $(1, 0)$. Пересечение с осью Oy: $(0, -1)$.

6) Имеем

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

Отсюда получаем, что $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, и $f'(x) < 0$ при $x \in (-5, -1)$. Значит, функция $f(x)$ строго возрастает на интервалах $(-\infty, -5]$ и $(-1, +\infty)$, и строго убывает на интервале $[-5, -1)$ (см. рисунок 1 а). Точка $x = -5$ — точка локального максимума. Обратим внимание, что точка $x = -1$ не является точкой локального минимума, не смотря на то, что в ней производная меняет знак с "-" на "+", поскольку $-1 \notin X$ (это точка разрыва). В точке $x = 1$ производная знак не меняет, следовательно, она не является точкой локального экстремума.

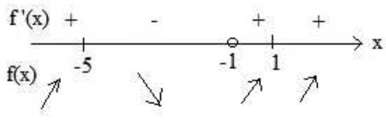

Рис. 1 а.

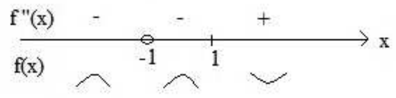

Рис. 1 б.

7) Найдем

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Значит, $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, и $f''(x) > 0$ при $x \in (1, +\infty)$, т.е. функция $f(x)$ вогнута на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 1]$, и выпукла на интервале $[1, +\infty)$ (см. рисунок 1 б). Точка $x = 1$ — точка перегиба функции.

8) Прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота (к ней график приближается и слева, и справа). Поскольку

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -5,$$

то прямая $y = x - 5$ является для графика функции $f(x)$ и левой, и правой наклонной асимптотой.

На основании проведенного исследования строим график (см. рисунок 2).

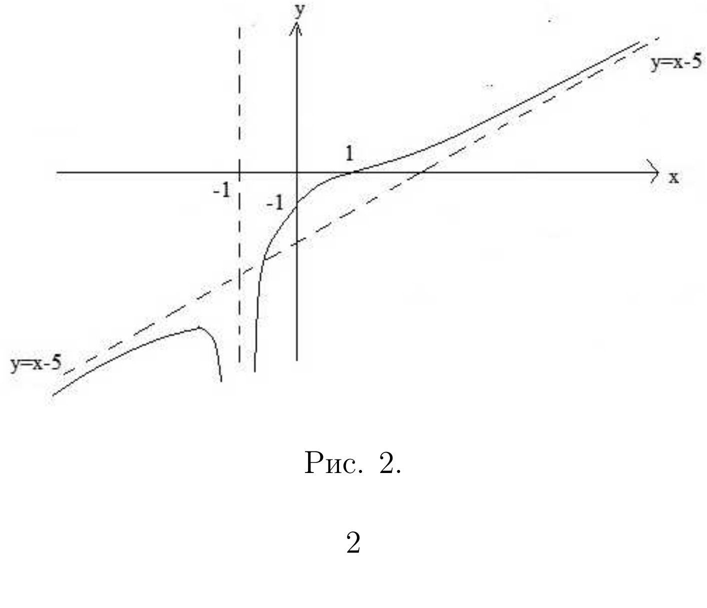

Рис. 2.

Пример. Проведем теперь исследование и построим график функции

$$f(x) = e^{-1/x}.$$

1) Область определения: $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Функция $f(x)$ непрерывна на X. Точка $x = 0$ — разрыв 2-ого рода:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = 0.$$

3) Функция непрерывно-дифференцируема произвольное число раз на X.

4) Свойствами четности/нечетности и периодичности функция не обладает.

5) Пересечений с осями координат нет.

6) Имеем

$$f'(x) = e^{-1/x} \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда получаем, что $f'(x) > 0$ на X, т.е. функция $f(x)$ строго возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Локальных экстремумов функция не имеет.

7) Найдем

$$f''(x) = e^{-1/x} \frac{(1 - 2x)}{x^4}.$$

Значит, $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, и $f''(x) < 0$ при $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, т.е. функция $f(x)$ выпукла на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \frac{1}{2}]$, и вогнута на интервале $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Точка $x = \frac{1}{2}$ — точка перегиба функции.

8) Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота (к ней график приближается слева). Поскольку

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

то прямая $y = 1$ является для графика функции $f(x)$ и левой, и правой наклонной асимптотой.

На основании проведенного исследования строим график (см. рисунок 3).

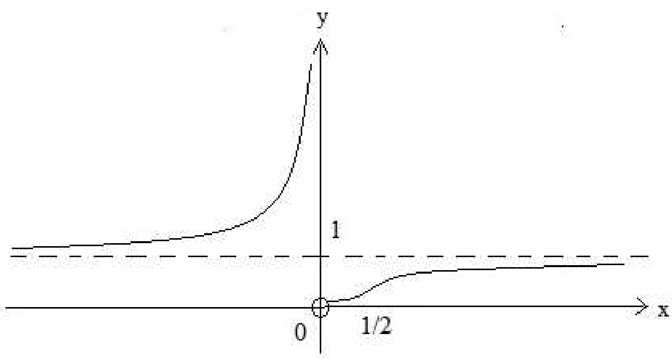

Рис. 3.

§ 8. Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в точке x. Зададим приращение h аргумента в этой точке и рассмотрим приращение функции

$$\Delta f = f(x + h) - f(x).$$

Согласно формуле Тейлора, имеем

$$\Delta f = f'(x)h + o(h).$$

Определение. *Линейная (относительно h) часть приращения функции называется дифференциалом (первым дифференциалом) функции в заданной точке:*

$$df = f'(x)h.$$

Согласно приведенному определению, функционал зависит как от аргумента x, так и от приращения аргумента h. Обозначим далее $h = dx$. Тогда получим

$$df = f'(x)dx,$$

откуда имеем

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Если приращение аргумента dx — мало, то $\Delta f \approx df$ с точностью до слагаемых первого порядка малости (см. рисунок 1).

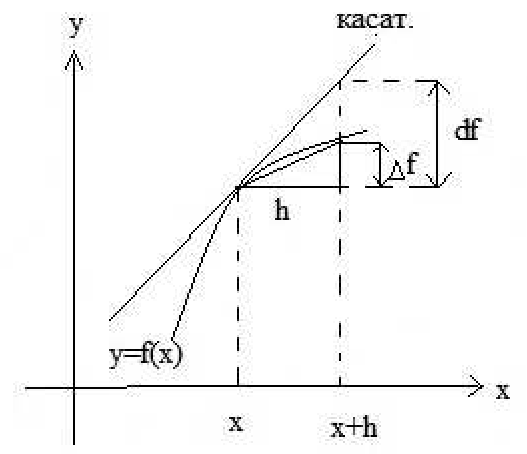

Рис. 1.

Пример. Верно

$$d\,(e^x) = e^x\,dx, \qquad d\,(\sin x) = \cos x\,dx, \qquad d\,(C) = 0 \quad (C = \mathrm{const}).$$

Пример. Пусть $S(r) = \pi r^2$ — функция, описывающая площадь круга радиуса r. Изменим радиус на величину dr. Подсчитаем, насколько изменится от этого площадь:

$$\Delta S = S(r+dr)-S(r) = \pi(r+dr)^2-\pi r^2 = 2\pi r dr+\pi dr^2 = S'(r)dr+\pi dr^2 = dS(r)+o(dr).$$

Отметим некоторые свойства первого дифференциала:

1) Верно:

$$d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x).$$

В самом деле:

$$d(f(x) \pm g(x)) = (f(x) \pm g(x))'dx = (f'(x) \pm g'(x))dx =$$

$$= f'(x)dx \pm g'(x)dx = df(x) \pm dg(x).$$

2) Справедливо:

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

Действительно:

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'dx = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$

$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

3) Если $g(x) \neq 0$, то

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

Имеем

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{g(x)f'(x)dx - f(x)g'(x)dx}{g^2(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

4) а) Пусть $y = f(x)$, где x — независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(x)dx.$$

б) Предположим теперь, что $y = f(x)$, где $x = g(t)$. Тогда

$$dy = (f(g(t)))'\, dt = f'(g(t))g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Заметим, что в обоих случаях форма первого дифференциала остается неизменной (свойство инвариантности формы первого дифференциала). В первом случае x — независимая переменная, и dx — это приращение независимой переменной. Во втором случае x — зависимая переменная (независимой переменной является t), и dx — это дифференциал функции. Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет получать идентичные выкладки в обоих этих случаях (т.е. реально нам не важно, зависимая переменная x, или независимая).

Введем теперь понятие дифференциалов старшего порядка.

Зафиксируем приращение аргумента h (т.е. считаем, что $h = \mathrm{const}$). Тогда первый дифференциал $df = f'(x)h$ будет являться функцией только аргумента x. Дифференциал от этой функции называется вторым дифференциалом функции $f(x)$. Имеем

$$d^2 f = d(df) = (f'(x)h)'\, h = f''(x)h^2.$$

Аналогично можно получить n-ый дифференциал:

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = \left(f^{(n-1)}(x)h^{n-1}\right)' h = f^{(n)}(x)h^n.$$

Полагая $h = dx$, получим

$$d^n f = f^{(n)}(x)dx^n,$$

или

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Отметим некоторые свойства старших дифференциалов:

1) Верно:

$$d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x).$$

2) Справедливо:

$$d^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f(x) d^{n-k} g(x)$$

(здесь $d^0 f(x) = f(x)$, $d^0 g(x) = g(x)$).

3) а) Пусть $y = f(x)$, где x — независимая переменная. Тогда

$$d^2 y = f''(x) dx^2.$$

б) Предположим теперь, что $y = f(x)$, где $x = g(t)$. Тогда

$$d^2 y = (f(g(t)))''\, dt^2 = (f'(g(t))g'(t))'\, dt^2 = f''(g(t))(g'(t))^2 dt^2 + f'(g(t))g''(t) dt^2 =$$

$$= f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x.$$

Видим, что выражение второго дифференциала в этих двух случаях получилось разным. Таким образом, дифференциалы старшего порядка свойством инвариантности формы не обладают (прежде чем вычислять старшие дифференциалы следует определиться, какую переменную считать независимой).

4) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x. Тогда ее приращение, согласно формуле Тейлора, можно представить в виде:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + o(h^n) =$$

$$= df + \frac{1}{2!} d^2 f + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f + o(h^n),$$

т.е. первый дифференциал описывает линейную часть приращения, второй — квадратичную, и т.д.

Заметим, что многие теоремы дифференциального исчисления, сформулированные ранее через производные, можно переформулировать через дифференциалы. При этом теория дифференциалов легче переносится на случай функции нескольких переменных, а также на случай отображений более общего вида, нежели теория производных.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 9. Функции, заданные неявно, параметрически и в полярных координатах

Если имеется формула $y = f(x)$, непосредственно сопоставляющая аргументу x значение функции y, то тогда говорят, что функция задана явно. В разных задачах могут возникать другие способы задания функции. Рассмотрим некоторые из них.

1. Неявные функции. Пусть имеется алгебраическое уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

связывающее две переменные x и y. Говорят, что это уравнение задает функцию $y = y(x)$ неявно, если при подстановке данной функции в уравнение, последнее обращается в тождество

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

В данном случае для нахождения производных $y'(x)$, $y''(x)$, ..., достаточно продифференцировать нужное число раз это тождество, используя обычные правила дифференцирования, и выразить из образовавшихся соотношений искомые производные.

Пример. Пусть функция $y(x)$ задается неявно уравнением

$$x^2 y + y^3 - 1 = 0.$$

Тогда

$$2xy + x^2 y' + 3y^2 y' = 0, \qquad 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' + 6yy'^2 + 3y^2 y'' = 0, \qquad \ldots,$$

откуда имеем

$$y'(x) = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}, \qquad y''(x) = \frac{-2y - 4xy' - 6yy'^2}{x^2 + 3y^2}, \qquad \ldots.$$

2. Функции, заданные параметрически. Пусть аргумент x и значение y заданы как функции некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in T.$$

Тогда говорят, что функция $y(x)$ задана в параметрическом виде. Здесь T — область изменения параметра.

В этом случае, учитывая свойство инвариантности формы первого дифференциала, имеем

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}, \qquad \ldots.$$

Пример. Пусть функция $y(x)$ задается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + 1, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда получаем

$$y'(x) = \frac{2t}{3t^2-1}, \qquad y''(x) = \frac{2(3t^2-1) - 2t \cdot 6t}{(3t^2-1)^3} = \frac{-6t^2-2}{(3t^2-1)^3}, \qquad \ldots .$$

3. Функции, заданные в полярных координатах. Пусть имеется точка (x, y) в Декартовой системе координат. Положим

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = r\sin\alpha. \end{cases}$$

Тогда значение

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

задает расстояние от точки до начала координат, а значение

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

— угол между прямой, соединяющей точку с началом координат, и осью Ox (см. рисунок 1).

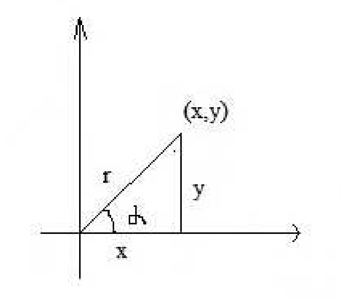

Рис. 1.

Поскольку значения параметров (r, α) однозначно определяют положение точки на плоскости, то можно эти параметры рассматривать как новую систему координат. Назовем ее полярной системой (r — полярный радиус, α — полярный угол).

Если имеется зависимость $r = r(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, то говорят, что ей соответствует кривая (функция), заданная в полярных координатах. Отметим, что, полярное задание легко можно свести к параметрическому, выбрав, например, α в качестве параметра. Тогда получим

$$\begin{cases} x = r(\alpha)\cos\alpha, \\ y = r(\alpha)\sin\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Рассмотренные способы задания функций могут сводиться друг к другу. В каждой конкретной задаче нужно использовать тот способ задания, который наиболее удобен. При этом описанные в предыдущих параграфах методы исследования функций не зависят от способа задания функции.

Пример. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R. В неявном виде она задается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отсюда

$$2x + 2yy' = 0, \quad 1 + y'^2 + yy'' = 0.$$

Получаем

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}.$$

Нетрудно проверить, что это вполне согласуется с теоремами дифференциального исчисления (о монотонности, выпуклости/вогнутости, и т.п.).

Для окружности можно записать и явное выражение

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

(здесь знак "+" у верхней полуокружности, а знак "-" — у нижней). Однако, такой способ задания окружности гораздо менее удобен.

Наиболее просто выгладит уравнение окружности в полярных координатах:

$$r = R, \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Выбрав полярный угол в качестве параметра, можно записать уравнение окружности в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha, \\ y = R\sin\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Отсюда

$$y' = \frac{R\cos\alpha}{-R\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$y'' = \frac{R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha}{-R^3\sin^3\alpha} = -\frac{1}{R\sin^3\alpha},$$

что также полностью согласуется с теоремами дифференциального исчисления.

Пример. Построим график функции, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4.$$

Проведем краткое исследование поведения функции:

1) Функция четная относительно x и y (достаточно нарисовать график в первой четверти: $x \geq 0$, $y \geq 0$, а на остальные три четверти его можно симметрично отобразить).

2) Пересечение с осью Ox: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Пересечение с осью Oy: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

3) Имеем

$$2x + 2yy' = 4x^3 + 4y^3y',$$

откуда находим

$$y' = \frac{x - 2x^3}{2y^3 - y} = \frac{x(1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)}{y(\sqrt{2}y - 1)(\sqrt{2}y + 1)}.$$

Тогда всю плоскость Oxy можно разбить на области, где $y' > 0$ (там функция $y(x)$ будет возрастать) и где $y' < 0$ (там функция $y(x)$ будет убывать) — см. рисунок 2 (знаками "+" и "-" там отмечены области с соответствующим знаком первой производной y').

Используя полученную информацию, нетрудно изобразить график функции (см рисунок 2).

Можно провести и дополнительное исследование для строгости (найти область определения и область значений функции, исследовать функцию на выпуклость/вогнутость, и т.п.).

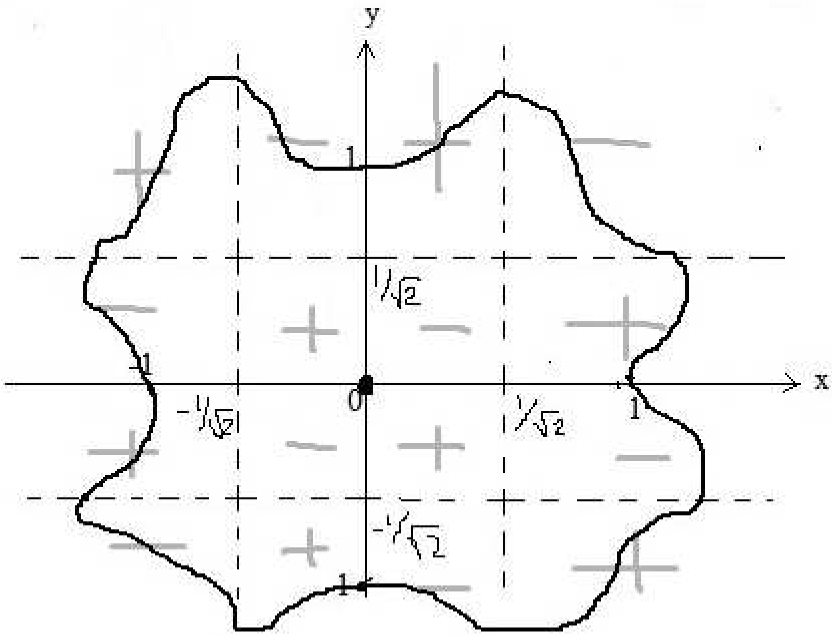

Рис. 2.

Пример. Построим график функции, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Снова проведем минимальное исследование:

1) Пересечение с осью Ox: $(0,0)$ (при $t=0$), $(2\sqrt{3}-3, 0)$ (при $t=\sqrt{3}$), $(-2\sqrt{3}-3, 0)$ (при $t=-\sqrt{3}$). Пересечение с осью Oy: $(0,0)$ (при $t=0$), $(0,-2)$ (при $t=2$).

2) Имеем

$$x'_t = 2 - 2t,$$

т.е. $x(t)$ возрастает при $t \in (-\infty, 1]$ и убывает при $t \in [1, +\infty)$;

$$y'_t = 3 - 3t^2,$$

т.е. $y(t)$ возрастает при $t \in [-1, 1]$ и убывает при $t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3}{2}(t+1),$$

т.е. $y(x)$ убывает при $t \in (-\infty, -1]$ и возрастает при $t \in [-1, +\infty)$;

При этом график проходит через точки: $(-3,-2)$ (при $t=-1$), $(1,2)$ (при $t=1$).

Также заметим, что $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $t \to -\infty$; $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$ при $t \to +\infty$.

На основании полученной информации строим примерный график (см. рисунок 3). На рисунке отмечены характерные точки, соответствующие значениям параметра:

$$t = -\infty, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, +\infty.$$

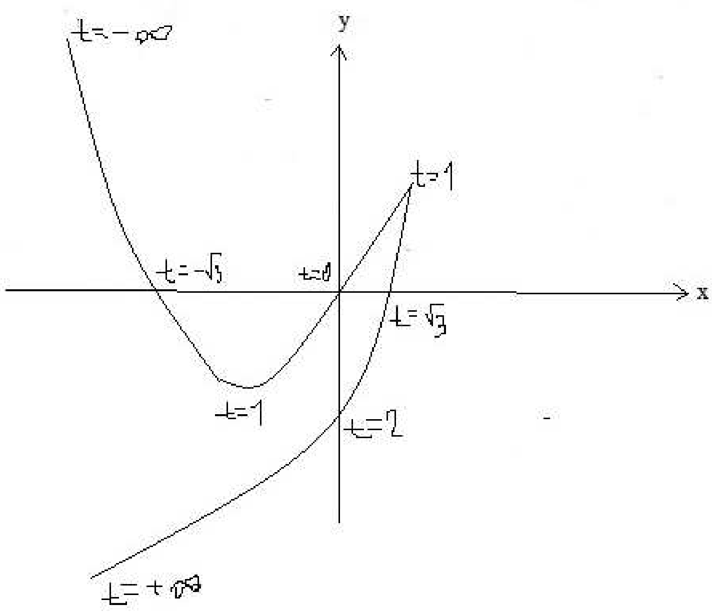

Рис. 3.

Пример. Построим график функции, заданной в полярных координатах

$$r = a + b\cos\alpha, \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Здесь $0 < a \le b$. Изменяя значения полярного угла α, можно следить за изменением полярного радиуса r. Заметим, что при $\alpha \in (\pi - \theta, \pi + \theta)$, где $\theta = \arccos\frac{a}{b}$, имеем $r < 0$, чего быть не может. Значит, при этих значениях параметра α функция не определена.

График рассматриваемой функции изображен на рисунке 4.

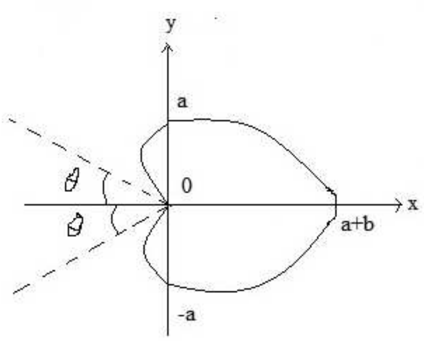

Рис. 4.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 10. Численные методы решения алгебраических уравнений

Пусть требуется решить алгебраическое уравнение

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a)f(b) < 0$. Тогда по теореме Коши — Больцано о нуле функции уравнение (1) будет иметь на отрезке $[a, b]$ хотя бы один корень c ($f(c) = 0$). Более того, если функция $f(x)$ строго монотонна на рассматриваемом отрезке, то такой корень будет ровно один.

Прежде, чем искать корни уравнения с заданной точностью, желательно определить, сколько всего этих корней существует, и где они расположены.

Пример. Пусть уравнение (1) имеет вид:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0.$$

Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на всей числовой $(-\infty, +\infty)$. Имеем

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 4.$$

Заметим, что $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. функция $f'(x)$ строго возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$. Поскольку $f'(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$, и $f'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то значит, существует единственная точка d, такая что $f'(d) = 0$. Нетрудно увидеть, что $d \in (0, 1)$ ($f'(0) = -1 < 0$, $f'(1) = 1 > 0$). Таким образом, $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, d)$, и $f'(x) > 0$ при $x \in (d, +\infty)$, т.е. функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(-\infty, d]$ и строго возрастает на интервале $[d, +\infty)$. Следовательно, уравнение имеет не более двух корней. Получаем

$$f(-1) = 5 > 0, \qquad f(0) = -1 < 0, \qquad f(1) = -1 < 0, \qquad f(2) = 5 > 0.$$

В итоге находим, что заданное уравнение имеет ровно два корня:

$$c_1 \in [-1, 0], \qquad c_2 \in [1, 2].$$

После отделения какого-то корня (определения промежутка $[a, b]$) можно приступать к его численному нахождению (с требуемой точностью).

1. Метод вилки (половинного деления). Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Найдем

$$\xi_1 = \frac{a + b}{2}.$$

Если $f(\xi_1) \le 0$, то положим $a_1 = \xi_1$, $b_1 = b$, если же $f(\xi_1) > 0$, то тогда положим $a_1 = a$, $b_1 = \xi_1$. Таким образом, мы построили отрезок $[a_1, b_1]$, который является половинкой исходного отрезка $[a, b]$. Далее находим

$$\xi_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

Если $f(\xi_2) \le 0$, то положим $a_2 = \xi_2$, $b_2 = b_1$, если же $f(\xi_2) > 0$, то тогда положим $a_2 = a_1$, $b_2 = \xi_2$, и т.д. В результате получаем систему вложенных друг в друга отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots [a_k, b_k] \supset \ldots .$$

При этом $\varepsilon_k = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$ при $k \to +\infty$. Значит, согласно лемме Коши — Кантора, у данной системы отрезков есть ровно одна общая точка:

$$a_k \le c < b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

По построению имеем

$$f(a_k) \le 0, \qquad f(b_k) > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Из непрерывности функции $f(x)$ вытекает, что

$$f(c) = \lim_{k \to +\infty} f(a_k) \le 0,$$

и

$$f(c) = \lim_{k \to +\infty} f(b_k) \ge 0.$$

Следовательно, $f(c) = 0$, т.е. c — это корень уравнения (1). Если вычислительный процесс остановить на k-ом шаге, то получим приближенное значение данного корня с точностью до ε_k.

2. Метод хорд. Снова для определенности считаем, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Построим хорду, соединяющую точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Получим

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a}.$$

Найдем точку пересечения этой хорды с оью Ox:

$$\xi_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Далее, так же как и в методе вилки, если $f(\xi_1) \le 0$, то полагаем $a_1 = \xi_1$, $b_1 = b$, если же $f(\xi_1) > 0$, то тогда полагаем $a_1 = a$, $b_1 = \xi_1$, и т.д.

Метод хорд, в отличие от метода вилки, учитывает форму графика функции $f(x)$. Поэтому считается, что в среднем, метод хорд сходится (к корню уравнения) быстрее метода вилки. Тем не менее, скорость его сходимости не высока. Если требуется вычислить корень уравнения с большой точностью, то гораздо более эффективным является следующий метод.

3. Метод итераций. Предположим, что решаемое уравнение записано в виде

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Пусть искомый корень c содержится в отрезке $[a, b]$.

Определение. *Говорят, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, если*

$$\exists L \ge 0: \ \forall x_1, x_2 \in [a, b] \ \Rightarrow \ |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le L |x_2 - x_1|.$$

Константа L называется константой Липшица.

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда она удовлетворяет условию Липшица на этом отрезке, причем можно положить*

$$L = \sup_{[a,b]} |\varphi'(x)|. \qquad (3)$$

Доказательство. Определим константу L по формуле (3). Согласно теореме Лагранжа, для $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ имеем

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} = \varphi'(\tilde{x}),$$

где $\tilde{x}$ — некоторая точка, лежащая между x_1 и x_2. Тогда

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| = |\varphi'(\tilde{x})|\,|x_2-x_1| \le L|x_2-x_1|.$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Далее будем считать, что функция $\varphi(x)$ в уравнении (2) удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a,b]$, причем $L<1$.

Выберем $\forall \xi_0 \in [a,b]$. Положим

$$\xi_k = \varphi(\xi_{k-1}), \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Покажем, что $\xi_k \to c$ при $k \to +\infty$. Действительно, пусть $\delta = |c-\xi_0|$. Тогда

$$|c-\xi_k| = |\varphi(c)-\varphi(\xi_{k-1})| \le L|c-\xi_{k-1}| \le \ldots \le L^k|c-\xi_0| = L^k\delta.$$

С учетом того, что $L<1$, отсюда имеем требуемое.

Пример. Решим уравнение

$$x = \cos x.$$

Здесь $\varphi(x) = \cos x$. Нетрудно убелиться, что корень рассматриваемого уравнения удовлетворяет условию $c \in [0,1)$. Поскольку

$$L = \sup_{[0,1)} |\varphi'(x)| = \sup_{[0,1)} |-\sin x| < 1,$$

то выбирая $\forall \xi_0 \in [0,1)$, можно построить последовательность

$$\xi_1 = \cos\xi_0, \qquad \xi_2 = \cos\xi_1 = \cos(\cos\xi_0), \qquad \ldots,$$

сходящуюся к корню c.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x = 2x.$$

Оно, очевидно, имеет корень $c=0$. Однако, если выбрать $\forall \xi_0 \ne 0$, то получим, что

$$\xi_k = 2\xi_{k-1} = 2^k\xi_0 \not\to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Проблема с методом итерации возникла из-за того, что здесь $\varphi(x) = 2x$, соответственно, $\varphi'(x) = 2 > 1$.

Пример. Пусть задано уравнение

$$x^4 - 2x - 4 = 0.$$

Нетрудно проверить, что оно имеет два корня: $c_1 \in [-2,-1]$, $c_2 \in [1,2]$. Будем искать, например, корень c_2.

Если переписать уравнение в виде

$$x = \frac{1}{2}x^4 - 2,$$

то $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$, $\varphi'(x) = 2x^2$, и $\sup\limits_{[1,2]} |\varphi'(x)| > 1$, т.е. метод итераций сходиться не будет.

Если же записать

$$x = \sqrt[4]{2x+4},$$

то $\varphi(x) = \sqrt[4]{2x+4}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{4}(2x+4)^{-3/4}$, и $\sup\limits_{[1,2]} |\varphi'(x)| < 1$, следовательно, метод итераций приведет к желаемому результату.

Далее предположим, что исходное уравнение записано в виде (1), его корень расположен на отрезке $[a,b]$, причем функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке, и $f'(x) \neq 0$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$x = x + \lambda f(x),$$

где λ — некоторая положительная постоянная, если $f'(x) < 0$ на $[a,b]$; и λ — некоторая отрицательная постоянная, если $f'(x) > 0$ на $[a,b]$. Тогда уравнение приняло форму (2) с $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$. Учитывая, что $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$, получаем, что при выборе числа λ достаточно малым по модулю придем к условию $\sup\limits_{[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$, необходимому для применения метода итераций.

Уравнение (1) можно свести к виду (2) и по следующему методу.

4. Метод касательных (Ньютона). Пусть дано уравнение (1). Будем считать, что его корень расположен на отрезке $[a,b]$, причем функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на этом отрезке, и $f'(x) \neq 0$.

Выберем $\forall \xi_0 \in [a,b]$ и построим касательную к графику функции $f(x)$ в точке ξ_0:

$$y = f(\xi_0) + f'(\xi_0)(x - \xi_0).$$

Найдем точку пересечения этой касательной с осью Ox:

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}.$$

В точке ξ_1 снова строим касательную, и т.д. В результате получаем последовательность

$$\xi_k = \xi_{k-1} - \frac{f(\xi_{k-1})}{f'(\xi_{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Если ширина отрезка $[a,b]$ достаточно мала, то данная последовательность будет сходиться к корню решаемого уравнения. В самом деле, уравнение (1) можно переписать в виде

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Тогда, полагая

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

получим
$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$
Следовательно, при x, близких к корню уравнения (1), будет выполняться условие $|\varphi'(x)| < 1$. Применяя метод итераций, придем к выписанной выше последовательности $\{\xi_k\}_{k=1,2,...}$.

Заметим, что метод итерации и его модификация — метод Ньютона обладают более быстрой сходимостью, по сравнению с методами вилки и хорд. Однако, для их применения отрезок $[a, b]$ должен быть достаточно узким. Поэтому обычно сначала с помощью методов вилки и хорд сужают отрезок, на котором находится корень уравнения, а затем с помощью методов итераций и Ньютона доводят вычисление корня до нужной точности. Для определения погрешности вычисления корня на k-ом шаге сравнивают ξ_k и ξ_{k-1}, что и позволяет оценить погрешность на текущем шаге.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 11. Интерполяция и регрессия

Пусть требуется восстановить неизвестную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ на основе сделанных измерений $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$, где $x_0, x_1, \ldots, x_m \in [a, b]$. Обычно в таких случаях подбирают функцию $L(x)$ из некоторого конкретного класса (чаще всего из класса полиномов) так, чтобы выполнялись условия:

$$f(x_i) = L(x_i), \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Тогда можно будет с определенной долей уверенности предполагать, что

$$f(x) \approx L(x), \qquad x \in [a, b],$$

(см рисунок 1).

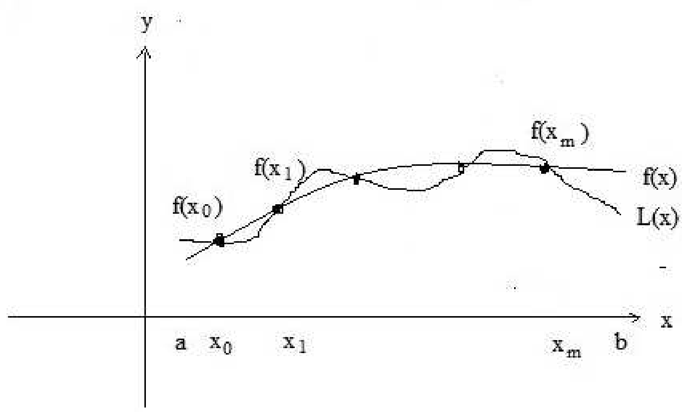

Рис. 1.

Такая задача называется задачей интерполяции.

Далее функцию $L(x)$ будем искать в виде полинома (интерполяционного полинома) степени m. Тогда задача интерполяции сведется к нахождению коэффициентов этого полинома.

1. Метод Ньютона. Положим

$$L(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_m(x - x_0) \ldots (x - x_{m-1}),$$

где $a_0, \ldots, a_m$ — некоторые постоянные. Тогда

$$f(x_0) = L(x_0) = a_0;$$

$$f(x_1) = L(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

откуда

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0};$$

$$f(x_2) = L(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0),$$

откуда

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)},$$

и т.д.

Таким образом, последовательно определяем коэффициенты $a_0, \ldots, a_m$. Этот метод удобен тем, что если мы решим добавить новое измерение в точке x_{m+1}, то в выражении для $L(x)$ добавится новое слагаемое

$$a_{m+1}(x - x_0) \ldots (x - x_m),$$

в то время, как предыдущие слагаемые с уже найденными коэффициентами $a_0, \ldots, a_m$ не изменятся.

1. Метод Лагранжа. Пусть

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_m)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_m)}, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Имеем $l_k(x_i) = 1$, если $i = k$, и $l_k(x_i) = 0$, если $i \neq k$; $i, k = 0, \ldots, m$.

Тогда можно положить

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) l_k(x).$$

Перепишем эту формулу в другом виде. Обозначим

$$\omega(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_m).$$

Получим

$$(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_m) = \frac{\omega(x)}{x - x_k},$$

$$(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_m) = \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x)}{x - x_k} =$$

$$= \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x) - \omega(x_k)}{x - x_k} = \omega'(x_k).$$

Значит,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)},$$

и следовательно,

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega(x) f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Основная проблема при решении задачи интерполяции — это оценить погрешность $(f(x) - L(x))$ при $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, m$. Если никакой дополнительной информации о функции $f(x)$ нет, то оценить погрешность, разумеется, не удастся. Предположим далее, что некая дополнительная информация у нас есть.

Будем считать, что функция $f(x)$ дифференцируема $(m + 1)$ раз на промежутке $[a, b]$. Выберем $\forall \bar{x} \in [a, b]$ $(\bar{x} \neq x_i,\ i = 0, \ldots, m)$ и оценим $(f(\bar{x}) - L(\bar{x}))$.

Положим

$$\varphi(x) = f(x) - L(x) - K\omega(x),$$

где K — некоторая постоянная. Заметим, что $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, m$. Выберем константу K следующим образом:

$$K = \frac{f(\bar{x}) - L(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}.$$

Тогда $\varphi(\bar{x}) = 0$.

По теореме Ролля: функция $\varphi'(x)$ имеет на промежутке $[a, b]$ хотя бы $(m + 1)$ корень, функция $\varphi''(x)$ — m корней, и т.д. Таким образом, найдется $\xi \in [a, b]$, такое что

$$\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0.$$

Поскольку $\deg L(x) \leq m$, то $L^{(m+1)}(x) \equiv 0$. При этом $\omega^{(m+1)}(x) = (m + 1)!$. Тогда

$$\varphi^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - K(m + 1)! = 0.$$

Следовательно,

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}.$$

Получаем

$$f(\bar{x}) - L(\bar{x}) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}\omega(\bar{x}).$$

Пусть

$$|f^{(m+1)}(x)| \leq M_{m+1}, \qquad x \in [a, b].$$

Тогда с учетом того, что

$$|\omega(x)| \leq (b - a)^{m+1}, \qquad x \in [a, b],$$

имеем

$$|f(\bar{x}) - L(\bar{x})| \leq \frac{M_{m+1}}{(m + 1)!}(b - a)^{m+1}. \tag{1}$$

Таким образом, для оценки погрешности интерполяции с помощью выведенной формулы достаточно оценить соответствующую производную $f^{(m+1)}(x)$. Это обычно пытаются сделать на основе информации о физической природе наблюдаемого процесса, описываемого функцией $f(x)$.

Замечание. Функции, для которых правая часть неравенства (1) стремится к нулю при $m \to +\infty$, образуют достаточно узкий класс. Например, это будет иметь место, если функция $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз, и все ее производные ограничены одной константой ($M_{m+1} = M$, $m = 1, 2, \ldots$). Поэтому в общем случае гарантировать уменьшение погрешности интерполяции долько засчет увеличения значения m (числа измерений) нельзя. Часто этого удается достигнуть с помощью подходящего выбора узлов $x_0, \ldots, x_m$. Однако, общих рекомендаций для оптимального выбора этих узлов в случае произвольной функции $f(x)$ нет.

Полиномы большой степени часто могут совершать резкие колебания на рассматриваемом промежутке. Поэтому при больших значениях m может возникнуть ситуация, когда функция $f(x)$ отличается от $L(x)$ при $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, m$, очень сильно (см. рисунок 2). Такая интерполяция оказывается очень плохой. В этом случае подбирают функцию $L(x)$ так, чтобы $L(x_i) \approx f(x_i)$, $i = 0, \ldots, m$ (см. рисунок 3). Это позволяет использовать полиномы меньшей степени. Подобная задача называется регрессионной задачей, а полином $L(x)$ — регрессионным полиномом. В частности, если строить $L(x)$ в виде полинома 1-ой степени, то получим линейную регрессию. В противном случае будет нелинейная регрессия.

Пусть, например,

$$L(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Коэффициенты $a_0, \ldots, a_k$ обычно выбирают исходя из условия

$$\sum_{i=0}^{m} |L(x_i) - f(x_i)| \to \min_{a_0,\ldots,a_k},$$

или

$$\sum_{i=0}^{m} (L(x_i) - f(x_i))^2 \to \min_{a_0,\ldots,a_k}$$

(метод наименьших квадратов). Подробнее см. курс математической статистики.

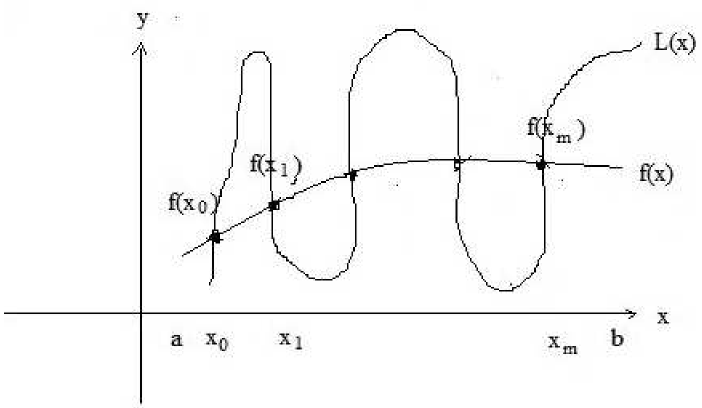

Рис. 2.

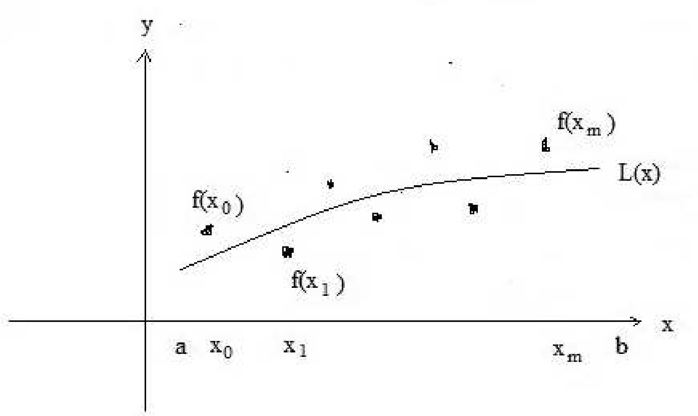

Рис. 3.

Отметим, что также, как и в задаче интерполяции, в задаче регрессии в качестве $L(x)$ можно использовать не только полиномы.

Пример. Пусть сделаны 4 измерения:

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 2, \qquad f(2) = 1, \qquad f(3) = 2.$$

Тогда полином Ньютона имеет вид:

$$L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2).$$

Подставляя измерения, находим

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad , a_2 = -1, \quad a_3 = \frac{2}{3},$$

т.е. получаем интерполяционный полином

$$L(x) = 1 + x - x(x-1) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{10}{3}x + 1.$$

Выпишем этот полином в форме Лагранжа:

$$L(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} +$$

$$+1 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{10}{3}x + 1.$$

Будем теперь искать линейный регрессионный полином

$$L(x) = ax + b,$$

исходя из метода наименьших квадратов:

$$F(a, b) = (1-b)^2 + (2-a-b)^2 + (1-2a-b)^2 + (2-3a-b)^2 \to \min_{a,b}.$$

Можно доказать, что тогда $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{6}{5}$, и

$$L(x) = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}.$$

Можно поставить более общую интерполяционную задачу: построить функцию $H(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$H^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \ldots, n_i, \quad i = 0, \ldots, m,$$

(т.е. мы добиваемся близости не только с самой функцией, но и с ее производными). Если $H(x)$ искать в виде полинома, то он будет называться полиномом Эрмита. Имеются соответствующие формулы для построения данного полинома. В частности, если $m = 0$, $n_0 = n$, то полином Эрмита примет вид:

$$H(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(получили совпадение с полиномом Тейлора). Тогда в окрестности точки x_0 имеем

$$f^{(k)}(x) \approx H^{(k)}(x), \quad k = 0, \ldots, n.$$

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (продолжение)

§ 12. Векторный анализ

Ранее мы исследовали скалярные функции одного вещественного аргумента. Однако, во многих реальных практических задачах приходится иметь дело с векторными функциями (когда одному вещественному аргументу сопоставляется векторное значение). Без потери общности в настоящем параграфе мы будем рассматривать трехмерные векторы, но, естественно, аналогичные результаты будут справедливы и для векторов любой размерности.

Под векторной функцией одного вещественного аргумента будем понимать вектор

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \qquad t \in X \subset R,$$

(здесь и далее векторы выделяем жирным шрифтом).

Все действия с векторами можно свести к действиям с их компонентами. Поэтому специальная теория дифференциального исчисления для векторных функций не требуется (достаточно тех результатов, что были получены ранее для скалярных функций). Тем не менее, векторная форма записи позволяет провести все необходимые вычисления в более удобном и компактном формате.

Если начала всех используемых векторов закреплены в одной точке (обычно в начале координат), то такие векторы называются радиус-векторами, в противном случае, получим свободные векторы. Далее будем рассматривать радиус-векторы.

Введем обозначения:

1) $|\mathbf{a}|$ — длина вектора $\mathbf{a}$,

2) $\mathbf{ab}$ (или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$,

3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Определение. *Вектор* $\mathbf{a}$ *называется пределом векторной функции* $\mathbf{r}(t)$ *при* $t \to t_0$ *(пишут* $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$*), если*

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

Заметим, что функция $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|$ — скалярная, т.е. определение предела векторной функции свелось к понятию предела скалярной функции.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$. *Тогда условие:*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$$

эквивалентно набору условий:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3.$$

Доказательство теоремы следует из того факта, что

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}.$$

Определение. *Векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *называется непрерывной в точке* $t_0 \in X$, *если*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Теорема. *Пусть* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. *Тогда для того чтобы векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *была непрерывной в точке* t_0 *необходимо и достаточно, чтобы в этой точки были непрерывными скалярные функции* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Отметим некоторые свойства векторных функций (при этом предполагаем, что все используемые в этих свойствах пределы существуют):

1) Если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$ (обратное, вообще говоря, не верно).

Действительно, это следует из неравенства: $||\mathbf{r}(t)| - |\mathbf{a}|| \le |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|$.

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)$.

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\mathbf{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).

4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)$.

5) $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) \times \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)$.

Докажем для примера свойство 5). Пусть

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}, \quad \lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}.$$

Положим

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{a}, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{b}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{p}(t)| = \lim_{t\to t_0} |\mathbf{q}(t)| = 0.$$

Имеем

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{p}(t)) \times (\mathbf{b} + \mathbf{q}(t)) =$$
$$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{q}(t) + \mathbf{p}(t) \times \mathbf{b} + \mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t).$$

Поскольку

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{q}(t)| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{q}(t)| \sin\alpha(t) \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{q}(t)|,$$
$$|\mathbf{p}(t) \times \mathbf{b}| = |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{b}| \sin\beta(t) \le |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{b}|,$$
$$|\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)| = |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{q}(t)| \sin\gamma(t) \le |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{q}(t)|$$

($\alpha(t)$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{q}(t)$; $\beta(t)$ — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{p}(t)$; $\gamma(t)$ — угол между векторами $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$), то тогда

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{a} \times \mathbf{q}(t)| = \lim_{t\to t_0} |\mathbf{p}(t) \times \mathbf{b}| = \lim_{t\to t_0} |\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)| = 0.$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}| \le |\mathbf{a} \times \mathbf{q}(t)| + |\mathbf{p}(t) \times \mathbf{b}| + |\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)|,$$

имеем

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0,$$

откуда и следует требуемое.

Теорема. *Пусть векторные функции* $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ *и скалярная функция* $f(t)$ *непрерывны в точке* $t_0 \in X$. *Тогда в этой точке будут непрерывны и векторные функции:*

$$\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t), \quad f(t)\mathbf{r}_1(t), \quad \mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t), \quad \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t).$$

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0},$$

то он называется производной векторной функции $\mathbf{r}(t)$ *в точке* t_0 *(пишут* $\mathbf{r}'(t_0)$ *или* $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\big|_{t=t_0}$*).*

Теорема. *Пусть* $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^T$*, причем скалярные функции* $x(t)$*,* $y(t)$*,* $z(t)$ *— дифференцируемы в точке* t_0*. Тогда*

$$\mathbf{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))^T.$$

Определение. *Векторная функция* $\mathbf{p}(t)$ *называется бесконечно малой по сравнению со скалярной функцией* $f(t)$ *при* $t\to t_0$ *(пишут* $\mathbf{p}(t)=\mathbf{o}(f(t))$*), если можно указать такую векторную функцию* $\mathbf{q}(t)$*, что*

$$\mathbf{p}(t)=f(t)\mathbf{q}(t),\qquad \text{причем}\qquad \lim_{t\to t_0}|\mathbf{q}(t)|=0.$$

Определение. *Векторная функция аргумента* t *называется линейной, если она представима в виде* $\mathbf{a}t+\mathbf{b}$*, где* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *— постоянные векторы.*

Определение. *Векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *называется дифференцируемой в точке* t_0*, если для любого приращения* h *аргумента* t *справедливо представление*

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0+h)-\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{a}h+\mathbf{o}(h),$$

где $\mathbf{a}$ *— постоянный вектор (зависящий от выбора точки* t_0*). При этом линейная векторная функция* $\mathbf{a}h$ *называется первым дифференциалом векторной функции* $\mathbf{r}(t)$ *(пишут* $d\mathbf{r}=\mathbf{a}h$*).*

Верны свойства:

1) Если векторная функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она там непрерывна.

2) Для дифференцируемости векторной функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 необходимо и достаточно, чтобы существовала производная этой функции в данной точке, причем тогда $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t_0)h$ (т.е. вектор $\mathbf{a}$ из определения дифференцируемости — это производная $\mathbf{r}'(t_0)$).

3) Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, скалярная функция $t=t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0, причем $t_0=t(\tau_0)$. Тогда

$$\big(\mathbf{r}(t(\tau_0))\big)'=\mathbf{r}'(t_0)t'(\tau_0).$$

4) Первый дифференциал векторной функции обладает свойством инвариантности формы.

5) Справедливо:

$$\big(\mathbf{r}_1(t)\pm\mathbf{r}_2(t)\big)'=\mathbf{r}_1'(t)\pm\mathbf{r}_2'(t),$$

$$\big(f(t)\mathbf{r}(t)\big)'=f'(t)\mathbf{r}(t)+f(t)\mathbf{r}'(t),$$

$$\big(\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)\big)'=\mathbf{r}_1'(t)\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2'(t),$$

$$\big(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\big)'=\mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t).$$

Лемма. *Пусть векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *дифференцируема в точке* t_0*, и* $|\mathbf{r}(t)|=C=\text{const}$ *для всех* t *из некоторой окрестности точки* t_0*. Тогда*

$$\mathbf{r}'(t_0)\mathbf{r}(t_0)=0.$$

Действительно, $\mathbf{r}^2(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = C^2$. Дифференцируя это выражение, получим требуемое.

Геометрический смысл леммы состоит в том, что если $|\mathbf{r}(t)| = C = \text{const}$, то тогда конец радиус-вектора движется по сфере, а скорость движения направлена по касательной к сфере, т.е. векторы $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогональны друг другу.

Введем понятие старших производных для векторной функции. Положим

$$\mathbf{r}^{(n)}(t_0) = \left(\mathbf{r}^{(n-1)}(t_0)\right)', \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Теорема. *Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ является n раз дифференцируемой в окрестности точки t_0. Тогда для любого t из данной окрестности справедлива формула Тейлора:*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \mathbf{o}\left((t - t_0)^n\right).$$

Отметим, что не все теоремы, доказанные ранее для скалярных функций, переносятся на векторный случай. В частности, теоремы Ролля и Лагранжа для векторных функций, вообще говоря, не верны.

Пример. Пусть $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$. Имеем $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{0}$, но поскольку $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ для всех $t \in [0, 2\pi]$, то нельзя найти такое $c \in (0, 2\pi)$, что $\mathbf{r}'(c) = \mathbf{0}$ (т.е. векторный аналог теоремы Ролля не работает).

Теорему Лагранжа для векторной функции можно сформулировать в более слабом виде.

Теорема. *Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$:*

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq |\mathbf{r}'(c)|(b - a).$$

Доказательство. Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то теорема очевидна. Пусть $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$. Тогда $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) \neq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{e}$ — вектор единичной длины, направленный в сторону вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$. Имеем

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a))\mathbf{e} = (\mathbf{r}(b)\mathbf{e} - \mathbf{r}(a)\mathbf{e}.$$

Положим $f(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{e}$. Применяя теорему Лагранжа для скалярных функций, имеем

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

где $c \in (a, b)$. Заметим, что $f'(c) = \mathbf{r}'(c)\mathbf{e}$. Значит,

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = \mathbf{r}'(c)\mathbf{e}(b - a) \leq |\mathbf{r}'(c)|(b - a).$$

Теорема доказана.

Замечание. Двумерный радиус-вектор $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ при $t \in X \subset R$ задает некоторую кривую на плоскости Oxy. Нетрудно заметить, что такое векторное задание кривой по сути представляет собой задание кривой в параметрическом виде. Если кривая — несамопересекающаяся (т.е. $\nexists t_1 \neq t_2 \in T$: $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$), то тогда она называется простой. Если $X = [\alpha, \beta]$, причем $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, то тогда кривая будет образовывать замкнутый контур. Аналогично трехмерный радиус-вектор $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ при $t \in X \subset R$ задает некоторую кривую в трехмерном пространстве. Исследование кривых часто удобно проводить с использованием векторного анализа (примененного к их радиус-векторам) — подробнее см. "Дифференциальную геометрию".

ГЛАВА V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятие первообразной и интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной (примитивной) функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\forall x \in X \ \Rightarrow \ F'(x) = f(x).$$

Пример. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \cos x$. Тогда нетрудно заметить, что первообразная будет иметь вид:

$$F(x) = \sin x + C,$$

где в качестве C можно взять любую константу.

Приведенный пример показывает, что первообразная ищется не однозначно.

Теорема. *Пусть $X = [a, b]$. Тогда:*

1) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на X, то функция $G(x) = F(x) + C$ также будет первообразной функции $f(x)$ на X при любом значении константы C.

2) Если $F(x)$ и $G(x)$ — две какие-то первообразные функции $f(x)$ на X, то тогда найдется такая константа C, что $G(x) = F(x) + C$ при $\forall x \in X$.

3) Для $\forall x_0 \in X$ и для $\forall y_0 \in (-\infty, +\infty)$ существует единственная первообразная $G(x)$ функции $f(x)$ на X, удовлетворяющая условию $G(x_0) = y_0$ (условие Коши).

Доказательство. 1) Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на X, и $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторая константа. Тогда

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in X,$$

т.е. $G(x)$ также будет первообразной функции $f(x)$ на X.

2) Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две какие-то первообразные функции $f(x)$ на X. Тогда

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \forall x \in X.$$

Согласно следствию к теореме Коши, отсюда получаем, что $G(x) - F(x) \equiv C$, т.е. $G(x) = F(x) + C$ при $\forall x \in X$, где C — некоторая постоянная.

3) Из пунктов 1) и 2) вытекает, что все множество первообразных функции $f(x)$ на $X = [a, b]$ описывается формулой:

$$G(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — некоторая произвольная первообразная, C — произвольная постоянная. Выбирая $C = y_0 - F(x_0)$, получим требуемое условие Коши:

$$G(x_0) = F(x_0) + y_0 - F(x_0) = y_0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что если множество X не является отрезком, то пункты 2) и 3) приведенной теоремы будут не верны.

Пример. Пусть $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = \cos x$. Выберем, например,

$$F(x) = \begin{cases} \sin x\ , & \text{если} \quad x \in [0, 1], \\ \sin x + 1, & \text{если} \quad x \in [2, 3], \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & \text{если} \quad x \in [0, 1], \\ \sin x\ , & \text{если} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Обе функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными функции $f(x)$ на X, но нельзя указать такую константу C, что $G(x) = F(x) + C$ для $\forall x \in X$.

Далее везде будем считать, что $X = [a, b]$.

Определение. *Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на этом отрезке (пишут: $\int f(x)\,dx$).*

В соответствии с доказанной выше теоремой, имеем

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, C — произвольная постоянная.

Процедура нахождения интеграла функции называется интегрированием (эта операция обратна дифференцированию). Если интеграл на рассматриваемом отрезке существует, то тогда функция называется интегрируемой на этом отрезке.

Теорема (интегралы от некоторых элементарных функций). *Верно:*

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

Установим далее достаточные условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. *Будем говорить, что некоторое свойство выполнено кусочно на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков (кусков), на каждом из которых выполнено указанное свойство.*

Например, функция может быть на отрезке кусочно-непрерывной, кусочно-дифференцируемой, кусочно-монотонной, и т.д.

Определение. *Функция $f(x)$ называется полигональной на отрезке $[a, b]$, если она кусочно-линейна на этом отрезке, т.е. существует разбиение данного отрезка:*

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b,$$

такое что

$$f(x) = p_i x + q_i \quad \text{при} \quad x \in (c_i, c_{i+1}), \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Здесь p_i, q_i, $i = 0, \ldots, n-1$, — некоторые постоянные. Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она называется ломаной.

Определение. *Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$, если*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq K\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Здесь величина K зависит только от ε и не зависит от x.

Теорема (о полигональной аппроксимации). *Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ можно построить последовательность ломаных $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, которая будет сходиться к $f(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей:

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b,$$

и через точки $(c_i, f(c_i))$, $i = 0,\ldots,n$, проведем ломаную. Обозначим ее $f_n(x)$. Покажем, что последовательность таких ломаных при $n = 1,2,\ldots$ будет удовлетворять требуемому условию.

По теореме Кантора функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Выберем некоторое $K > \frac{b-a}{\delta}$ и рассмотрим $\forall n \geq K$. Тогда

$$c_{i+1} - c_i = \frac{b-a}{n} < \delta, \qquad i = 0,\ldots,n-1,$$

и значит,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in [c_i, c_{i+1}], \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Возьмем $\forall x \in [a,b]$. Найдем $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ такое что $x \in [c_i, c_{i+1}]$. Пусть для определенности $f(c_i) \leq f(c_{i+1})$ (иначе все аналогично). Получаем

$$f(c_i) = f_n(c_i) \leq f_n(x) \leq f_n(c_{i+1}) = f(c_{i+1}).$$

Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f(c_i) + f(c_i) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(c_i)| + |f(c_i) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f(c_{i+1}) - f(c_i)| + |f(c_i) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Отсюда имеем требуемое. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$, и пусть функции $f_n(x)$ интегрируемы (имеют первообразную) на отрезке $[a,b]$. Тогда и функция $f(x)$ будет интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Данная теорема будет доказана далее в разделе "Функциональные последовательности и ряды".

Теорема. *Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Построим последовательность ломаных $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, как в теореме о полигональной аппроксимации. Пусть

$$f_n(x) = p_i x + q_i, \quad x \in [c_i, c_{i+1}], \quad i = 0,\ldots,n-1,$$

где постоянные p_i, q_i, $i = 0,\ldots,n-1$, определяются из условий:

$$f(c_i) = p_i c_i + q_i, \quad f(c_{i+1}) = p_i c_{i+1} + q_i, \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Положим

$$F_n(x) = p_i\frac{x^2}{2} + q_i x + l_i, \quad x \in [c_i, c_{i+1}], \quad i = 0,\ldots,n-1,$$

где постоянные l_i, $i = 0, \ldots, n-1$, выберем так, чтобы функция $F_n(x)$ оказалась непрерывной на отрезке $[a, b]$. Для этого достаточно выполнить равенства

$$F_n(c_i - 0) = F_n(c_i + 0), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Этих равенств $(n-1)$ штука. Значит, одну из констант $l_0, \ldots, l_{n-1}$ можно выбрать произвольно, т.е. функция $F_n(x)$ находится с точностью до одной произвольной постоянной. Нетрудно проверить, что

$$F_n'(x) = f_n(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

т.е. $F_n(x)$ — первообразная функции $f_n(x)$ на $[a, b]$. Значит, каждую из ломаных можно проинтегрировать. Тогда, учитывая две предыдущие теоремы, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Отметим, что непрерывность — это только достаточное условие интегрируемости, но не необходимое.

ГЛАВА V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 2. Свойства неопределенного интеграла

Верны следующие свойства интеграла:

1) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

В самом деле, поскольку

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))\,dx\right)' = f(x) \pm g(x),$$

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x),$$

то получаем требуемое (если производные двух функций равны, то, согласно следствию к теореме Коши, эти функции на рассматриваемом отрезке равны с точностью до аддитивной постоянной).

2) $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ ($c = \mathrm{const}$).

Аналогично, это следует из того, что

$$\left(\int cf(x)\,dx\right)' = cf(x),$$

$$\left(c\int f(x)\,dx\right)' = c\left(\int f(x)\,dx\right)' = cf(x).$$

3) Замена переменной: пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, тогда

$$\int g(y)\,dy = \int g(f(x))f'(x)\,dx.$$

Действительно:

$$\left(\int g(y)\,dy\right)'_x = g(y)y'_x = g(f(x))f'(x),$$

$$\left(\int g(f(x))f'(x)\,dx\right)'_x = g(f(x))f'(x).$$

Операцию замены переменной можно записать в другом виде (в виде операции внесения переменной под знак дифференциала):

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(f(x))\,d\left(f(x)\right).$$

Как следствие, имеем:

$$\int g(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int g(y)\,dy, \qquad y = cx, \quad c = \mathrm{const} \neq 0,$$

$$\int g(c+x)\,dx = \int g(y)\,dy, \qquad y = c + x, \quad c = \mathrm{const}.$$

Пример. Вычислим $\int xe^{x^2}\,dx$. Сделаем замену переменной: $y = x^2$. Тогда $x = \sqrt{y}$, $dy = 2xdx$, $dx = dy/\big(2\sqrt{y}\big)$, откуда

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \sqrt{y}e^y \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C, \quad C = \text{const}.$$

Или, что то же самое:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}(x^2)' e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Пример. Найдем

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Аналогично:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

4) Формула интегрирования по частям: пусть $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

В самом деле:

$$\left(\int f(x)g'(x)\,dx\right)' = f(x)g'(x),$$

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)' = (f(x)g(x))' - \left(\int f'(x)g(x)\,dx\right)' =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

Обозначим $u = f(x)$, $v = g(x)$. Тогда формулу интегрирования по частям можно переписать в виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Пример. Вычислим $\int xe^x\,dx$. Обозначим $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$. Тогда $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ (в качестве $g(x)$ достаточно взять любую из первообразных функции $g'(x)$). Получаем

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример. Найдем

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Пример. Верно:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Пример. Пусть требуется найти $I = \int e^x \sin x\,dx$. Имеем

$$I = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - I.$$

Значит,

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Основное правило вычисления интеграла заключается в том, чтобы с помощью замены переменной и формулы интегрирования по частям свести заданный интеграл к какому-то табличному интегралу. Однако, общих правил выбора подходящих замен переменных нет. Более того, многие интегралы в принципе нельзя свести ни к одному табличному виду, иначе говоря, их нельзя выразить через элементарные функции. Такие интегралы называются неберущимися. Они представляют собой непростейшие функции.

Примеры важных неберущихся интегралов:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int e^{\pm x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{e^{\pm x}}{x}\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx, \quad \int \cos(x^2)\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

и т.д.

§ 3. Интегрирование рациональных функций

В данном параграфе рассмотрим алгоритм нахождения интеграла от рациональной функции:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Здесь

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m, \qquad Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$.

Шаг 1. Выделение целой части и сведение к правильной дроби. Рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ будем называть правильной, если $m < n$. Если дробь, неправильная, то ее можно свести к виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ — полиномы, причем $\deg R(x) = m - n$, $\deg P_1(x) < n$. Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Поскольку $\int R(x)\,dx$ — табличный, то задача свелась к нахождению интеграла от правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Пример. Пусть требуется найти

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + x - 1}\,dx.$$

С помощью деления "уголком" нетрудно установить, что

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-1} = x-1+\frac{x}{x^2+x-1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+x-1}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{x}{x^2+x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x}{x^2+x-1}\,dx.$$

Шаг 2. Разложение правильной дроби на простейшие составляющие. Рациональные дроби вида:

$$\frac{A}{(x-\lambda)^k}, \qquad \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $A, B, C, \lambda, p, q \in \mathbb{R}$, называются простейшими.

Найдем корни многочлена $Q(x)$. Предположим, что он имеет вещественные корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$, соответственно, и комплексно-сопряженные пары корней: $(p_1 \pm iq_1), \ldots, (p_r \pm iq_r)$ кратности $m_1, \ldots, m_r$, соответственно. Ясно, что

$$k_1 + \ldots + k_s + 2(m_1 + \ldots + m_r) = n.$$

Разложим многочлен $Q(x)$ на множители:

$$Q(x) = b_0(x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x-p_1-iq_1)^{m_1}(x-p_1+iq_1)^{m_1} \ldots (x-p_r-iq_r)^{m_r}(x-p_r+iq_r)^{m_r} =$$
$$= b_0(x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_s)^{k_s}\big((x-p_1)^2+q_1^2\big)^{m_1} \ldots \big((x-p_r)^2+q_r^2\big)^{m_r}.$$

Нетрудно доказать, что тогда будет справедливо представление вида:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{1}{b_0}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{A_{j1}}{(x-\lambda_j)} + \frac{A_{j2}}{(x-\lambda_j)^2} + \ldots + \frac{A_{jk_j}}{(x-\lambda_j)^{k_j}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{r}\left(\frac{B_{l1}x+C_{l1}}{\big((x-p_l)^2+q_l^2\big)} + \frac{B_{l2}x+C_{l2}}{\big((x-p_l)^2+q_l^2\big)^2} + \ldots + \frac{B_{lm_l}x+C_{lm_l}}{\big((x-p_l)^2+q_l^2\big)^{m_l}}\right)\right].$$

Здесь $A_{j1}, \ldots, A_{jk_j}$, $B_{l1}, \ldots, B_{lm_l}$, $C_{l1}, \ldots, C_{lm_l}$ — некоторые вещественные коэффициенты. Для нахождения этих коэффициентов следует правую часть выписанной формулы привести к общему знаменателю (это будет $Q(x)$). Числитель полученной дроби надо тогда тождественно приравнять к $P_1(x)$. В результате получим систему для нахождения искомых коэффициентов. Она будет однозначно разрешима.

В результате указанного представления, задача вычисления интеграла от правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших рациональных дробей.

Пример. Разложим дробь

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$$

на простейшие дроби. Имеем

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x-1)^2(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}.$$

Значит,

$$A(x-1)(x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x-1)^2(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^2(x+1) = x^2-1.$$

Можно раскрыть скобки в выражении слева, привести подобные слагаемые и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа друг к другу. Получим тогда систему из 5 уравнений с 5 неизвестными и найдем A, B, C, D, E.

Можно действовать по-другому. Поскольку последнее равенство должно выполняться как тождество, то достаточно взять 5 любых значений переменной x, подставить их в это тождество, и из полученных соотношений определить A, B, C, D, E. Возьмем, например, $x = 0, \pm 1, \pm 2$. Получим:

$$-A+B+C+E=-1,$$

$$4B=0, \qquad 8C=0,$$

$$15A+15B+5C+6D+3E=3,$$

$$15A-5B+45C+18D-9E=3.$$

Отсюда нетрудно найти искомые коэффициенты.

Шаг 3. Интегрирование простейших рациональных дробей. Найдем

$$\int \frac{A}{(x-\lambda)^k}\,dx.$$

При $k=1$ получим

$$\int \frac{A}{x-\lambda}\,dx = A\ln|x-\lambda| + \mathrm{Const}.$$

Если $k>1$, то

$$\int \frac{A}{(x-\lambda)^k}\,dx = \frac{A}{(1-k)(x-\lambda)^{k-1}} + \mathrm{Const}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^k}\,dx.$$

Если $k=1$, то

$$\int \frac{Bx+C}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \int \frac{B(x-p)+(C+Bp)}{(x-p)^2+q^2}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d\left((x-p)^2+q^2\right)}{(x-p)^2+q^2} + \frac{C+Bp}{q}\int \frac{d\left(\frac{x-p}{q}\right)}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left((x-p)^2+q^2\right) + \frac{C+Bp}{q}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-p}{q}\right) + \mathrm{Const}.$$

При $k>1$ получим

$$\int \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^k}\,dx = \int \frac{B(x-p)+(C+Bp)}{((x-p)^2+q^2)^k}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{d\left((x-p)^2+q^2\right)}{((x-p)^2+q^2)^k} + (C+Bp) \int \frac{d(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^k} =$$

$$= \frac{B}{2(1-k)((x-p)^2+q^2)^{k-1}} + (C+Bp)I_k,$$

где

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k}, \qquad t = x-p.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, нетрудно вывести следующее реккурентное соотношение:

$$I_k = \frac{1}{2q^2(k-1)} \frac{t}{(t^2+q^2)^{k-1}} + \frac{1}{q^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}.$$

С помощью данного соотношения можно за k шагов свести вычисление I_k к вычислению I_1. Правило вычисления I_1 уже было приведено выше.

ГЛАВА V. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 3. Интегрирование рациональных функций (продолжение)

Если многочлен $Q(x)$ имеет кратные корни (особенно, если они комплексные), то для нахождения интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

может оказаться более удобным метод Остроградского.

Пусть дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, и

$$Q(x) = b_0(x-\lambda_1)^{k_1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s}\big((x-p_1)^2+q_1^2\big)^{m_1}\dots\big((x-p_r)^2+q_r^2\big)^{m_r}.$$

Тогда будет справедлива следующая формула:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{\tilde{P}_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\tilde{P}_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где

$$Q_1(x) = (x-\lambda_1)^{k_1-1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s-1}\big((x-p_1)^2+q_1^2\big)^{m_1-1}\dots\big((x-p_r)^2+q_r^2\big)^{m_r-1},$$

$$Q_2(x) = b_0(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_s)\big((x-p_1)^2+q_1^2\big)\dots\big((x-p_r)^2+q_r^2\big),$$

$\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$ — полиномы, причем $\deg\tilde{P}_1(x) < \deg Q_1(x)$, $\deg\tilde{P}_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Для нахождения коэффициентов многочленов $\tilde{P}_1(x)$ и $\tilde{P}_2(x)$ продифференцируем указанную формулу. Получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{\tilde{P}_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{\tilde{P}_2(x)}{Q_2(x)},$$

откуда следует

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\tilde{P}_1'(x)Q_2(x) - H(x)\tilde{P}_1(x) + \tilde{P}_2(x)Q_1(x)}{Q(x)}.$$

Здесь

$$H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}.$$

Нетрудно доказать, что $H(x)$ — это многочлен. В результате из тождества

$$P(x) = \tilde{P}_1'(x)Q_2(x) - H(x)\tilde{P}_1(x) + \tilde{P}_2(x)Q_1(x)$$

найдем искомые коэффициенты.

Для вычисления оставшегося интеграла

$$\int \frac{\tilde{P}_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

можно использовать стандартный алгоритм, описанный ранее (поскольку корни многочлена $Q_2(x)$ простые, то вычислительная сложность данного алгоритма значительно уменьшается).

Пример. Пусть требуется вычислить

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^3}\,dx.$$

По методу Остроградского имеем:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^3}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Продифференцировав данное тождество, получим соотношения для нахождения коэффициентов $A,\ldots,G$. Затем оставшуюся подынтегральную дробь разложим на простейшие слагаемые

$$\frac{Ex^2+Fx+G}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{K}{x-1} + \frac{Lx+M}{x^2+1},$$

и найдя коэффициенты K, L, M, сведем задачу к интегрированию простейших рациональных дробей.

Замечание. Иногда использование обычных свойств интеграла позволяет упростить интегрирование рациональной дроби.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2}\,dx.$$

Для применения стандартного алгоритма следует разложить подынтегральную дробь на простейшие составляющие:

$$\frac{x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_4}{(x+1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2},$$

что достаточно громоздко. Между тем, интеграл можно вычислить гораздо проще:

$$\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{4(x^4-1)} + \mathrm{Const}.$$

§ 4. Интегрирование некоторых типов иррациональных выражений

Обозначим через $R(\cdot)$ — рациональную функцию, т.е. функцию, к аргументам которой применены только арифметические операции ("$+$", "-", "$\times$", "$/$").

1. Для нахождения интеграла

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, достаточно сделать замену переменной

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Тогда получим

$$x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a},$$

и, таким образом, придем к интегралу от рационального выражения:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx = \int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right)\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}\right)' dt.$$

2. Пусть теперь требуется вычислить интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)\,dx,$$

где $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Положим

$$t^\lambda = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Здесь $\lambda = \text{НОК}\{q_1, \ldots, q_k\}$. В результате снова получим интеграл от рационального выражения.

Пример. Найдем

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - 3\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Возьмем

$$\lambda = \text{НОК}\{2, 3, 4\} = 12,$$

и сделаем замену переменной:

$$t^{12} = x + 1.$$

Тогда

$$I = \int \frac{t^6 + 2t^4}{t^3 - 3t^6} 12t^{11}\,dt.$$

Далее можно воспользоваться алгоритмом вычисления интеграла от рациональной дроби (см. предыдущий параграф).

3. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, можно вычислить с помощью одной из следующих подстановок Эйлера:

а) $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$, (если $a > 0$);

б) $tx = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$, (если $c > 0$);

в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - \lambda_1)$, (если квадратичный многочлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни λ_1, λ_2).

Пример. Пусть имеется интеграл

$$I = \int \frac{x\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}\,dx.$$

Здесь можно применить любую из подстановок а) – в). Выберем, например, подстановку б). Положим

$$tx = \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{2}.$$

Тогда
$$x^2 - 3x + 2 = t^2x^2 - 2\sqrt{2}tx + 2,$$
откуда
$$x - 3 = t^2x - 2\sqrt{2}t,$$
и значит,
$$x = \frac{2\sqrt{2}t - 3}{t^2 - 1}.$$
Следовательно,
$$I = \int \frac{\frac{2\sqrt{2}t-3}{t^2-1}\left(t\frac{2\sqrt{2}t-3}{t^2-1} - \sqrt{2}\right)}{\frac{2\sqrt{2}t-3}{t^2-1} + 1} \left(\frac{2\sqrt{2}t - 3}{t^2 - 1}\right)' dt.$$
Пришли к рациональному подынтегральному выражению.

Отметим, что в некоторых случаях интегралы рассматриваемого вида можно вычислять и с помощью других подстановок. Например, если под интегралом присутствует корень $\sqrt{1+x^2}$, то можно положить $x = \operatorname{tg} t$, и т.п.

Замечание. Во многих практических задачах возникают интегралы вида
$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})\, dx,$$
где $P_n(x)$ — полином степени n. При $n > 2$ такой интеграл в общем случае является неберущимся.

4. Рассмотрим интегрирование дифференциальных биномов:
$$\int x^m(a + bx^n)^p\, dx.$$
Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $m = \frac{m_1}{m_2}$, $n = \frac{n_1}{n_2}$, $p = \frac{p_1}{p_2}$, $m_1, m_2, n_1, n_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$. Для вычисления такого интеграла используют следующие подстановки:

а) Если p — целое, то положим $x = t^\lambda$, где $\lambda = \text{НОК}\{m_2, n_2\}$.

Пример. Пусть задан интеграл
$$\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x^2})^2\, dx.$$
Тогда следует положить $x = t^6$.

а) Если $\frac{m+1}{n}$ — целое, то положим $a + bx^n = t^{p_2}$.

Пример. Рассмотрим интеграл
$$\int \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}}\, dx.$$
Здесь следует положить $1 + x\sqrt{x} = t^2$.

а) Если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое, то положим $a + bx^n = t^{p_2}x^n$.

Пример. Пусть задан интеграл
$$\int \sqrt{x}\sqrt{1 + x^3}\, dx.$$
Интеграл вычислится, если положить $1 + x^3 = t^2x^3$.

Теорема (Чебышев). *Если ни одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ не целое, то интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\, dx$ является неберущимся.*

§ 5. Интегрирование некоторых типов тригонометрических выражений

1. Снова через $R(\cdot)$ обозначим рациональную функцию. Для вычисления интеграла вида

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

можно сделать замену переменной

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Тогда

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В результате получим интеграл от рационального выражения

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В некоторых случаях можно использовать более простые подстановки:

а) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то можно положить $t = \cos x$.

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то можно положить $t = \sin x$.

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно положить $t = \operatorname{tg} x$.

Пример. Имеем:

$$\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\sin^2 x + 1}\, dx = -\int \frac{\cos^2 t}{2 - \cos^2 x}\, d(\cos x) = \big[t = \cos x\big] = \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 2};$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 1}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x + 1}\, dx = \big[t = \operatorname{tg} x\big] = \int \frac{tdt}{(2t^2+1)(1+t^2)}.$$

2. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \sin^\nu x \cos^\mu x\, dx,$$

где μ, ν — некоторые рациональные числа. Будем для определенности считать, что $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда, полагая $z = \sin^2 x$, получим

$$I = \frac{1}{2} \int z^{(\nu-1)/2} (1-z)^{(\mu-1)/2}\, dz,$$

а это есть — интеграл от дифференциального бинома. Используя установленные ранее результаты, имеем, что интеграл окажется берущимся, только если будет выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) μ — нечетное целое;

б) ν — нечетное целое;

в) $(\mu + \nu)$ — четное целое.

В этих случаях интеграл можно свести к интегралу от рационального выражения (см. ранее).

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение интеграла и основные свойства

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ограниченная функция $f(x)$. Разобем отрезок на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Положим $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$ (назовем это рангом дробления). Выберем $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

(назовем ее суммой Римана).

Определение. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$*, и он не зависит от способа дробления отрезка* $[a, b]$ *и от выбора точек* $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$*, то он называется определенным интегралом (по Риману) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a, b]$ *(пишут* $\int_a^b f(x)\, dx$*).*

Заметим, что условие $\lambda \to 0$ не эквивалентно условию $n \to +\infty$ (из первого следует второе, а обратное — не обязательно). Определенный интеграл (если он существует), в отличие от неопределенного интеграла, — это число. Если интеграл существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на заданном отрезке $[a, b]$.

Пример. Пусть $f(x) = x$, и $x \in [0, 1]$. Разобьем отрезок $[0, 1]$, например, на n равных частей:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1.$$

Тогда $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, где $h = \frac{1}{n}$. Выберем, например, $\xi_i = x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. В этом случае: $\lambda = \frac{1}{n}$, и значит, $\lambda \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$. Получаем:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} ih^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Можно ли на основании этих вычислений утверждать, что $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$? Вообще говоря, нет, поскольку мы брали конкретное дробление отрезка $[0, 1]$ и конкретным образом выбирали точки $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$. Где гарантия, что при другом выборе величина предела $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$ будет такой же?

Пример. Рассмотрим функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть $x \in [0, 1]$. Разобем отрезок $[0, 1]$ на n произвольных частей. Построим сумму Римана, выбирая в качестве ξ_i рациональные числа. Тогда получим $\sigma = 1$, и значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = 1$. Будем теперь в качестве ξ_i выбирать иррациональные числа. Тогда получим $\sigma = 0$, и значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае предел суммы Римана зависит от способа выбора точек $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$. Значит, $\nexists \int_0^1 f(x)\, dx$, т.е.

функция Дирихле не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$ (и на любом другом отрезке также).

Замечание. Если $a<b$, то по определению положим

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отметим некоторые свойства определенного интеграла:

1) пусть $\tilde{f}(x)$ — ограниченная на $[a,b]$ функция, причем $\tilde{f}(x)=f(x)$ при $x\in[a,b]$ за исключением конечного числа точек, тогда если $\int_a^b f(x)\,dx = I$, то $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = I$;

2) $\int_a^b 0\,dx = 0$;

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

4) $\int_a^b dx = b-a$;

5) $\int_a^b (c_1f_1(x)+c_2f_2(x))\;dx = c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx$ $(c_1,c_2=\mathrm{const})$;

6) если $f(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$;

7) если $f(x)\ge g(x)$ при $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$;

8) если $m\le f(x)\le M$ при $x\in[a,b]$, то $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$ $(m,M=\mathrm{const})$;

9) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $(c\in[a,b])$;

10) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема (о среднем). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда* $\exists c\in[a,b]$*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Используя теорему Вейерштрасса, положим

$$m=\min_{[a,b]} f(x), \qquad M=\max_{[a,b]} f(x).$$

Тогда $m\le f(x)\le M$ при $x\in[a,b]$. Значит, по свойству 8):

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

Если $a=b$, то теорема очевидна. Если $a<b$, то

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M.$$

По теореме Коши — Больцано (о промежуточных значениях функции): $\exists c\in[a,b]$:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

§ 2. Условия существования определенного интеграла и его геометрический смысл

Как и ранее, полагаем, что на отрезке $[a, b]$ задана ограниченная функция $f(x)$. Разбиваем отрезок на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Снова обозначаем $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, и пусть $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$.

Найдем

$$m = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x),$$

и построим

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

(нижнюю и верхнюю суммы Дарбу).

Свойства сумм Дарбу:

1) На любом дроблении отрезка $[a, b]$ верно:

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Здесь σ — сумма Римана.

2) При добавлении новых точек в дробление отрезка $[a, b]$ нижняя сумма Дарбу может только увеличиться, а верхняя — только уменьшиться.

В самом деле, пусть имеется некоторое дробление отрезка (назовем это дробление τ_1):

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Добавим в это дробление одну новую точку $\bar{x}$ (полученное более мелкое дробление назовем τ_2). Найдем $j \in \{0, \ldots, n-1\}$: $x_j < \bar{x} < x_{j+1}$, т.е.:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < \bar{x} < x_{j+1} < \ldots < x_n = b.$$

Положим

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$\bar{m}_j = \inf_{[x_j, \bar{x}]} f(x), \qquad \bar{M}_j = \sup_{[x_j, \bar{x}]} f(x),$$

$$\hat{m}_j = \inf_{[\bar{x}, x_{j+1}]} f(x), \qquad \hat{M}_j = \sup_{[\bar{x}, x_{j+1}]} f(x).$$

Построим

$$s_1 = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

— суммы Дарбу для дробления τ_1, и

$$s_2 = \sum_{i=0}^{j-1} m_i \Delta x_i + \bar{m}_j (\bar{x} - x_j) + \hat{m}_j (x_{j+1} - \bar{x}) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{j-1} M_i \Delta x_i + \bar{M}_j(\bar{x} - x_j) + \hat{M}_j(x_{j+1} - \bar{x}) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

— суммы Дарбу для дробления τ_2.

Нетрудно заметить, что

$$\bar{m}_j \geq m_j, \quad \hat{m}_j \geq m_j, \qquad \bar{M}_j \leq M_j, \quad \hat{M}_j \leq M_j.$$

Отсюда следует, что $s_2 \geq s_1$, $S_2 \leq S_1$. Аналогично по индукции можно рассмотреть ситуацию, когда в дробление добавляется несколько новых точек.

3) Пусть τ_1 и τ_2 — два каких-то произвольных дробления отрезка $[a, b]$, и пусть s_1, S_1 — суммы Дарбу для дробления τ_1, и s_2, S_2 — суммы Дарбу для дробления τ_2. Тогда

$$s_1 \leq S_2, \qquad s_2 \leq S_1,$$

т.е. любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Действительно, объединим дробления τ_1 и τ_2 (к точкам одного дробления присоединим точки другого дробления). Полученное новое дробление (которое будет мельче дроблений τ_1 и τ_2) назовем τ_3. Пусть s_3, S_3 — суммы Дарбу для дробления τ_3. По свойствам 1) и 2) имеем:

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2, \qquad s_2 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_1.$$

Пришли к требуемому.

Из выписанных свойств следует, что при умельчении дробления (при $\lambda \to 0$) нижние суммы Дарбу растут (и при этом они ограничены сверху любой из верхних сумм Дарбу), а верхние суммы Дарбу, наоборот, убывают (и при этом они ограничены снизу любой из нижних сумм Дарбу). Значит,

$$\exists \lim_{\lambda \to 0} s = I_*, \qquad \exists \lim_{\lambda \to 0} S = I^*.$$

Ясно, что $I_* \leq I^*$.

Теорема (критерий интегрируемости по Риману). *Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0,$$

или, что тоже самое, чтобы имело место соотношение $I_* = I^*$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists \int_a^b f(x)\, dx = I$. Тогда $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \lambda > 0 : \lambda < \delta\ \Rightarrow |I - \sigma| < \varepsilon.$$

Имеем

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon, \quad \forall \lambda < \delta,$$

и следовательно,

$$I - \varepsilon < s \leq \sigma \leq S < I + \varepsilon, \quad \forall \lambda < \delta.$$

Получаем, что $0 \leq S - s < 2\varepsilon$, и потому $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. Значит, $I_* = I^* = I$. Учитывая, что

$$s \leq \sigma \leq S,$$

по теореме "о двух милиционерах" находим, что $\exists \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I$. Таким образом, приходим к требуемому: $\exists \int_a^b f(x)\,dx = I$. Теорема доказана.

Далее будут рассмотрены более простые достаточные условия существования определенного интеграла.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 2. Условия существования определенного интеграла и его геометрический смысл (продолжение)

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Доказательство. Согласно теореме Кантора, функция $f(x)$ будет равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall\lambda < \delta\ \Rightarrow\ \omega_i = M_i - m_i < \varepsilon,\ i = 0,\dots,n-1.$$

Здесь использованы все те же обозначения, что и при построении сумм Дарбу. Тогда

$$0 \le S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon(b-a).$$

Значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$, и таким образом, $\exists \int_a^b f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Кусочная непрерывность функции на отрезке означает, что она имеет на этом отрезке конечное число разрывов 1-ого рода. При построении сумммы Римана (или сумм Дарбу) при устремлении ранга дробления к нулю получим $n \to +\infty$, т.е. общее число отрезков, на которые мы разбиваем отрезок $[a,b]$ (число слагаемых в построенных интегральных суммах) будет стремится к бесконечности. Вклад каждого из отдельных слагаемых в этих суммах будет стремиться к нулю. Поэтому конечные изменения в конечном числе слагаемых никак не повлияет на предел интегральных сумм. Отсюда и следует указанный результат.

Если $c_1,\dots,c_m \in [a,b]$ — точки разрыва функции $f(x)$ (здесь m фиксированное натуральное число), то тогда, используя свойства интеграла, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_m}^b f(x)\,dx,$$

и в итоге все сводится к интегрированию непрерывной функции на нескольких отрезках.

Теорема. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$m_i = f(x_i), \quad M_i = f(x_{i+1}), \quad i = 0,\dots,n-1.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Если $\lambda < \delta$, то получим

$$0 \le S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\Delta x_i < \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \varepsilon(f(b) - f(a)).$$

Значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$, и таким образом, $\exists \int_a^b f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Выясним геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$. фигура, задаваемая условиями:

$$0 \leq y \leq f(x), \qquad x \in [a, b],$$

называется криволинейной трапецией. Найдем ее площадь (обозначим ее S_{tr}). Видно (см. рисунок 1), что

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq S_{tr} \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = S.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$S_{tr} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Здесь предполагается, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

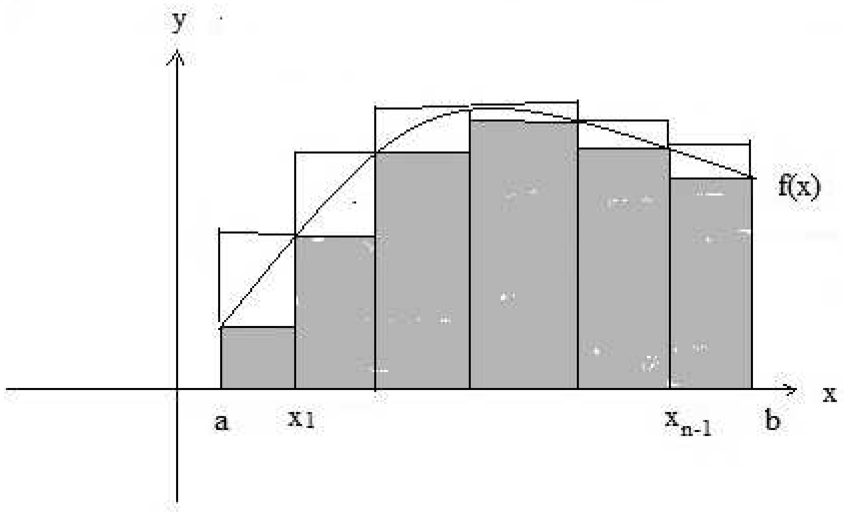

Рис. 1.

Пример. Найдем $I = \int_0^1 x\, dx$. Функция $f(x) = x$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а следовательно, интегрируема там. Она неотрицательна. Криволинейная трапеция представляет собой прямоугольный треугольник с площадью $S_{tr} = \frac{1}{2}$. Значит, $I = \frac{1}{2}$.

§ 3. Правила вычисления определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Функция вида

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

где $x \in [a, b]$, называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема (Барроу). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то тогда функция $F(x)$ будет дифференцируемой на $[a, b]$, причем*

$$F'(x) = f(x).$$

Доказательство. Имеем

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Здесь $c \in (a,b)$ (такое значение c найдется, согласно теореме о среднем). Теорема доказана.

В соответствии с теоремой Барроу, функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда все множество первообразных на данном отрезке можно описать формулой:

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная. Получаем

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C, \qquad \Phi(a) = C,$$

откуда имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$

— формула Ньютона — Лейбница (основная формула интегрального исчисления).

Пример. Вычислим

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, согласно формуле Ньютона — Лейбница, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла (поиску первообразной). Однако, если интеграл неберущийся, то применить формулу Ньютона — Лейбница не удастся, во всяком случае, напрямую.

Формулу Ньютона — Лейбница можно вывести при более общих предположениях. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, имеет там непрерывную первообразную $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$), возможно, за исключением конечного числа точек $c_1,\ldots,c_m \in [a,b]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

причем, без потери общности, будем считать, что точки $c_1,\ldots,c_m$ включены в число точек дробления. Тогда

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\Phi'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Здесь $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ (применили теорему Лагранжа), $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\ldots,n-1$. Заметим, что мы пришли к сумме Римана, поэтому, устремляя ранг дробления к нулю, приведем полученное соотношение к требуемому виду:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отметим, однако, что если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем точки $c_1, \ldots, c_m$ являются точками разрыва 1-ого рода, то часто бывает гораздо удобнее применить формулу Ньютона — Лейбница к каждому непрерывному участку по отдельности:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_m}^b f(x)\,dx,$$

чем искать единую непрерывную на $[a, b]$ первообразную $\Phi(x)$.

Пример. Пусть требуется вычислить

$$I = \int_{-1}^2 \operatorname{sign} x\,dx.$$

Здесь

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0, \\ \ \ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ \ \ 1, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найдем первообразную функции $f(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -x + C_1, & \text{если} \quad x < 0, \\ \ \ x + C_2, & \text{если} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Имеем $\Phi'(x) = f(x)$, за исключение точки $x = 0$. Для того, чтобы функция $\Phi(x)$ была непрерывной на отрезке $[-1, 2]$, положим $C_1 = C_2 = C$. Тогда

$$I = \Phi(2) - \Phi(-1) = (2 + C) - (1 + C) = 1.$$

Или, проще так:

$$I = \int_{-1}^0 \operatorname{sign} x\,dx + \int_0^2 \operatorname{sign} x\,dx = \int_{-1}^0 (-1)\,dx + \int_0^2 dx = (-x)\Big|_{-1}^0 + x\Big|_0^2 = -1 + 2 = 1.$$

Теорема (замена переменных в определенном интеграле). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и взаимно-однозначно отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ в отрезок $[a, b]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство. Разобьем отрезки $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Выберем некоторые $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Составим суммы Римана для интегралов, стоящих в левой и правой частях формулы (1):

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Поскольку все подинтегральные функции в (1) по условию теоремы интегрируемы на рассматриваемых отрезках, то предел каждой из этих сумм Римана не зависит от способа дробления отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$. Поэтому без потери общности будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ взаимно-однозначно отображает отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ в отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, т.е. $x_i = \varphi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

По теореме Лагранжа: $\exists \tilde{\tau}_i \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Предел каждой из рассматриваемых сумм Римана не зависит от выбора точек ξ_i, τ_i, $i = 0, \ldots, n$. Поэтому без потери общности положим $\tau_i = \tilde{\tau}_i$, $\xi_i = \varphi(\tilde{\tau}_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Тогда имеем $\sigma_1 = \sigma_2$. Переходя к пределу при ранге дробления, стремящимся к нулю, получим формулу (1). Теорема доказана.

Пример. Вычислим

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Здесь $a > 0$. Сделаем замену переменной: $x = a \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда получим

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\, dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Теорема (формула интегрирования по частям в определенном интеграле). *Пусть функции $f(x)g'(x)$ и $f'(x)g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

Доказательство настоящей теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Пример. Имеем

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = x(-\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\, dx = -x \cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 4. Некоторые теоремы интегрального исчисления

Теорема (интегральная формула Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx$$

— остаточный член в интегральной форме.

Доказательство. Обозначим

$$V(x) = (b-x)^n.$$

Тогда

$$V'(x) = -n(b-x)^{n-1}, \quad \ldots, \quad V^{(n)}(x) = (-1)^n n!, \quad V^{(n+1)}(x) = 0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$0 = \int_a^b f(x)V^{(n+1)}(x)\,dx = f(x)V^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)V^{(n)}(x)\,dx =$$

$$= f(x)V^{(n)}(x)\Big|_a^b - f'(x)V^{(n-1)}(x)\Big|_a^b + \int_a^b f''(x)V^{(n-1)}(x)\,dx = \ldots =$$

$$= (-1)^n n!\left(f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right) -$$

$$-(-1)^n \int_a^b f^{(n+1)}(x)V(x)\,dx.$$

Отсюда имеем требуемое. Теорема доказана.

Теорема (обобщенная теорема о среднем). *Пусть функции $g(x)$ и $f(x)g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, причем функция $g(x)$ не меняет знака на этом отрезке. Тогда $\exists \mu \in [m,M]$:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Здесь $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $g(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \qquad x \in [a,b],$$

и значит,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Обозначая
$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$
приходим к требуемому. Теорема доказана.

Замечание. Предположим в обобщенной теореме о среднем дополнительно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b]$: $\mu = f(c)$ (согласно теореме Коши — Больцано), и итоговая формула в этом случае принимает вид:
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$
Если взять $g(x) = 1$ при $x \in [a,b]$, то придем к обычной теореме о среднем:
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена и $(n+1)$ раз непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда, применяя к остаточному члену в формуле Тейлора в интегральной форме обобщенную теорему о среднем, получим
$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_a^b (b-x)^n\,dx = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$
где $c \in [a,b]$, что соответствует форме Лагранжа.

§ 5. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Ранее было доказано, что для любых $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$, и для любых $p > 1$, $q > 1$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, верны неравенства:
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \tag{1}$$
(неравенство Геледера),
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \tag{2}$$
(неравенство Минковского).

Пусть неотрицательные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей:
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$
Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$. Положим
$$a_i = \varphi(x_i)(\Delta x_i)^{1/p}, \quad b_i = \psi(x_i)(\Delta x_i)^{1/q}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$
— в формуле (1), и
$$a_i = \varphi(x_i)(\Delta x_i)^{1/p}, \quad b_i = \psi(x_i)(\Delta x_i)^{1/p}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

— в формуле (2). Тогда неравенства (1) и (2) примут вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(x_i)\Delta x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi^p(x_i)\Delta x_i\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^q(x_i)\Delta x_i\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i)+\psi(x_i))^p \Delta x_i\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi^p(x_i)\Delta x_i\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^p(x_i)\Delta x_i\right)^{1/p}.$$

Устремляя ранг дробления к нулю, придем к интегральным формулам:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \le \left(\int_a^b \varphi^p(x)\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b \psi^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$

$$\left(\int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b \varphi^p(x)\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b \psi^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Например, при $p = q = 2$ получим

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \le \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx},$$

$$\sqrt{\int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))^2\,dx} \le \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx}.$$

Аналогично и многие другие дискретные неравенства (например, неравенство Йенсена) могут быть записаны в интегральной форме.