ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 6. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей фигур в декартовых координатах. Согласно рассмотренному ранее геометрическому смыслу определенного интеграла, площадь фигуры, удовлетворяющей условиям:

$$a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)$$

(см. рисунок 1 а), будет равна

$$S_{\text{а}} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

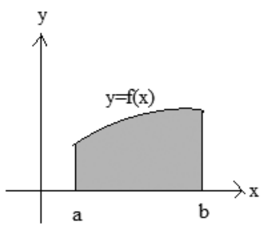

Рис. 1 а.

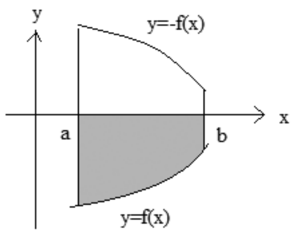

Рис. 1 б.

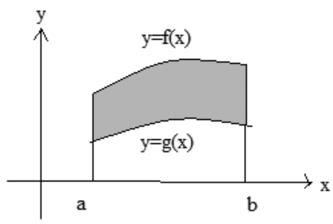

Рис. 1 в.

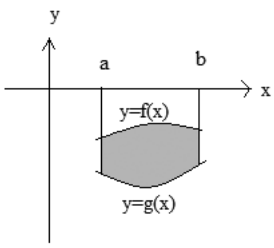

Рис. 1 г.

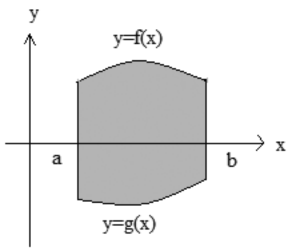

Рис. 1 д.

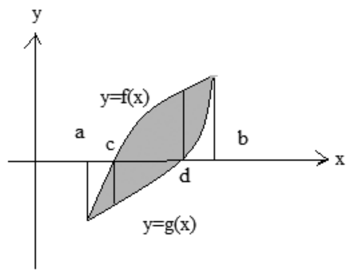

Рис. 1 е.

Фигуру

$$a \le x \le b, \quad f(x) \le y \le 0$$

(см. рисунок 1 б) можно симметрично повернуть относительно оси Ox, и тогда получим, что

$$S_{\text{б}} = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если

$$a \le x \le b, \quad 0 \le g(x) \le y \le f(x)$$

(см. рисунок 1 в), то тогда

$$S_{\text{в}} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Аналогично, если

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le f(x) \le 0$$

(см. рисунок 1 г), то

$$S_{\text{г}} = -\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Для

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le f(x),$$

где $g(x) \le 0$, $f(x) \ge 0$ (см. рисунок 1 д), имеем

$$S_{\text{д}} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Наконец, в общем случае, когда фигура задается условиями:

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le f(x),$$

причем $g(x)$ и $f(x)$ — знакопроизвольные функции (см. рисунок 1 е), также придем к формуле:

$$S_{\text{е}} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 1, \quad y = -x^2 + 1.$$

Эти две параболы образуют фигуру:

$$-1 \le x \le 1, \quad x^2 - 1 \le y \le -x^2 + 1,$$

и значит,

$$S = \int_{-1}^{1} \big((-x^2+1) - (x^2-1)\big)\,dx = 2\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\,dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ (т.е. вычислим площадь эллипса). Запишем уравнение кривой в параметрическом виде:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Имеем

$$S = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t\, d(a\cos t) = 2ab\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = ab\pi.$$

В частности, если $a = b = R$, то получим площадь круга радиуса R: $S = \pi R^2$.

2. Вычисление площадей фигур в полярных координатах. Пусть фигура T задается условиями:

$$0 \le r \le r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

где r — полярный радиус, φ — полярный угол (см. рисунок 2 а).

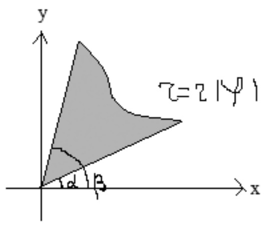

Рис. 2 а.

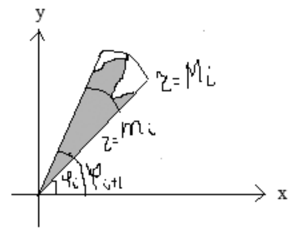

Рис. 2б.

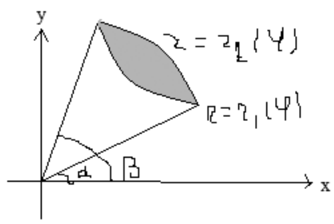

Рис. 2в.

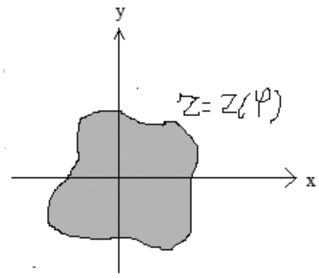

Рис. 2 г.

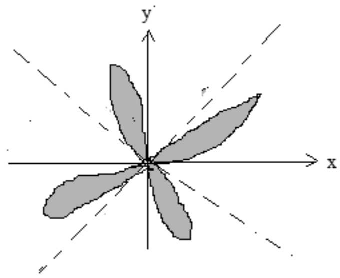

Рис. 2 д.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Положим $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta\varphi_i$ (ранг дробления),

$$m_i = \inf_{[\varphi_i, \varphi_{i+1}]} r(\varphi), \quad M_i = \sup_{[\varphi_i, \varphi_{i+1}]} r(\varphi), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Пусть T_i — кусок фигуры T, такой что:

$$0 \le r \le r(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}].$$

Здесь $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда:

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} S(T_i),$$

где $S(T)$ — площадь фигуры T, $S(T_i)$ — площадь фигуры T_i, $i = 0, \ldots, n-1$.

Получаем (см. рисунок 2 б), что

$$\frac{m_i^2}{2}\Delta\varphi_i \le S(T_i) \le \frac{M_i^2}{2}\Delta\varphi_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_i^2}{2}\Delta\varphi_i \le S(T) \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i^2}{2}\Delta\varphi_i.$$

Заметим, что выражения в левой и правой части полученного двойного неравенства представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для интеграла

$$\int_\alpha^\beta \frac{r^2(\varphi)}{2}\, d\varphi.$$

Следовательно, если этот интеграл существует, то устремляя ранг дробления к нулю, придем к формуле:

$$S(T) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Для фигуры:

$$0 \le r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

(см. рисунок 2 в) получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)\,d\varphi.$$

Аналогично для фигуры

$$0 \le r \le r(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

(см. рисунок 2 г) имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной линией:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2).$$

Введя полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

сведем уравнение кривой к виду

$$r = \sqrt{\sin 4\varphi}$$

(см. рисунок 2 д). Тогда искомая площадь равна

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} \sin 4\varphi\,d\varphi = 1.$$

3. Вычисление объемов тел. Пусть задано тело P, и пусть $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью $x = \mathrm{const}$, $x \in [a, b]$ (см рисунок 3 а).

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Положим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$ (ранг дробления),

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} S(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} S(x), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Пусть P_i — кусок тела P, для которого $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Здесь $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда:

$$V(P) = \sum_{i=0}^{n-1} V(P_i),$$

где $V(P)$ — объем тела P, $V(P_i)$ — объем тела P_i, $i = 0, \ldots, n-1$.

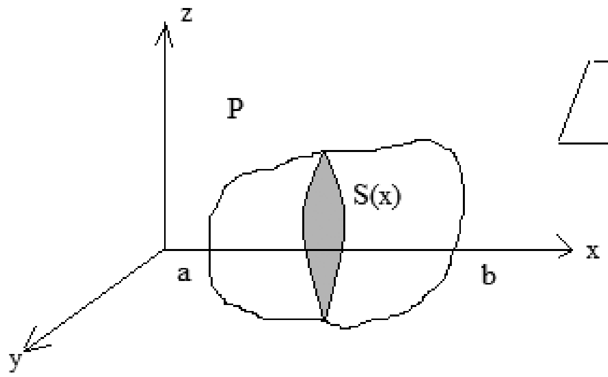

Рис. 3 а.

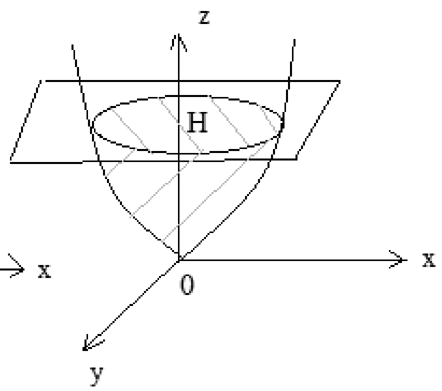

Рис. 3 б.

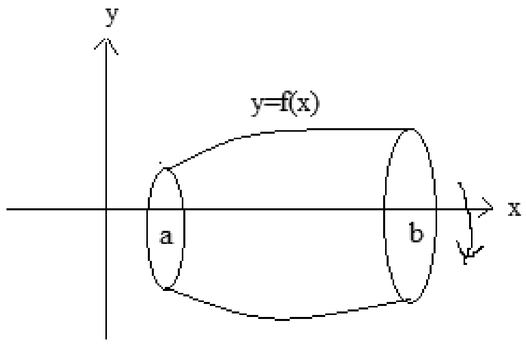

Рис. 3 в.

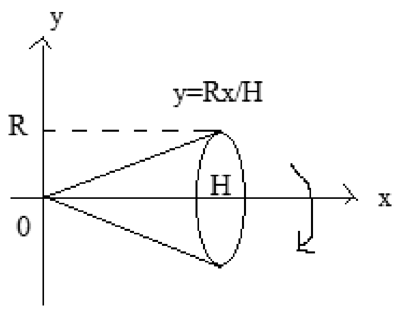

Рис. 3 г.

Получаем, что

$$m_i \Delta x_i \leq V(P_i) \leq M_i \Delta x_i, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq V(P) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Заметим, что выражения в левой и правой части полученного двойного неравенства представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для интеграла

$$\int_a^b S(x)\, dx.$$

Следовательно, если этот интеграл существует, то устремляя ранг дробления к нулю, придем к формуле:

$$V(P) = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Пример. Найдем объем тела (параболлоида), ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad z = H,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $H > 0$ (см. рисунок 3 б). Сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ представляет собой эллипс:

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} \leq 1$$

с площадью (см. ранее):

$$S(z) = abz\pi.$$

Значит, объем тела будет равен

$$V = \int_0^H S(z)\,dz = \int_0^H abz\pi\,dz = \frac{1}{2}ab\pi H^2.$$

Предположим, что тело P получено путем вращения кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox (см. рисунок 3 в). Такое тело называется телом вращения. Найдем его объем. Поскольку сечение тело плоскостью $x = \mathrm{const}$ представляет собой круг радиуса $f(x)$, то

$$S(x) = \pi f^2(x), \quad x \in [a, b].$$

Значит,

$$V(P) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. Найдем объем конуса с высотой H и радиусом основания R. Этот конус можно получить путем вращения прямой $y = \frac{Rx}{H}$, $x \in [0, H]$, вокруг оси Ox (см. рисунок 3 г). Следовательно,

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 6. Геометрические приложения определенного интеграла (продолжение)

4. Вычисление длины кривой. Пусть на плоскости Oxy задана кривая l, пробегающая от точки A до точки B. Разобьем кривую на n произвольных кусочков:

$$A = M_0 \frown M_1 \frown \ldots \frown M_n = B.$$

Точки $M_0, \ldots, M_n$ соединим ломаной (см. рисунок 4 а). Периметр полученной ломаной обозначим p. Тогда величина

$$L = \sup p, \tag{1}$$

где супремум берется по всевозможным дроблениям кривой l, называется длиной этой кривой.

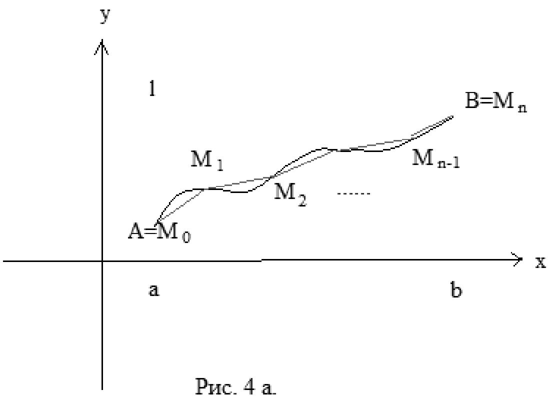

Рис. 4 а.

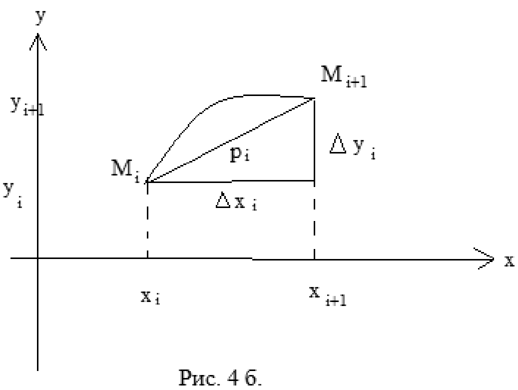

Рис. 4 б.

Пусть p_i — длина отрезка $\overline{M_i M_{i+1}}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} p_i.$$

Ясно, что добавление новых точек дробления может только увеличить значение периметра p. Поэтому знак супремума в формуле (1) можно заменить знаком предела при ранге дробления кривой стремящимся к нулю.

4.1. Случай явного задания кривой. Пусть уравнение кривой l имеет вид:

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

причем функция $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a, b]$ (т.е. кривая l — гладкая). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда можно положить $M_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$.

Имеем (см. рисунок 4 б):

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \Delta x_i.$$

Здесь, согласно теореме Лагранжа, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Получили сумму Римана. Значит,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

4.2. Случай параметрического задания кривой. Пусть уравнение кривой l имеет вид:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ (кривая l — гладкая). Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n произвольных частей:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Тогда можно положить $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$, $\Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta t_i$.

Имеем (см. рисунок 4 б):

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\varphi'(\tilde{\tau}_i)\right)^2 + \left(\psi'(\hat{\tau}_i)\right)^2} \Delta t_i.$$

Здесь, согласно теореме Лагранжа, $\tilde{\tau}_i, \hat{\tau}_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Рассмотрим сумму Римана:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\varphi'(\tau_i)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_i)\right)^2} \Delta t_i,$$

где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Нетрудно доказать, что при сделанных предположениях $|p - \sigma| \to 0$ при $\lambda \to 0$. Значит,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

4.3. Длина кривой в полярных координатах. Пусть уравнение кривой l имеет вид:

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

где r — полярный радиус, φ — полярный угол. Введем параметризацию:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Тогда, используя результаты предыдущего пункта, получаем:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример. Выведем формулу длины окружности радиуса R:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

В явном виде имеем:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R].$$

Значит,

$$L = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2R\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi R.$$

Введем параметризацию:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$L = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = \int_{0}^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

Наконец, в полярных координатах уравнение окружности примет вид:

$$r = R, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Получаем

$$L = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{0^2 + R^2}\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} R\, d\varphi = 2\pi R.$$

Замечание. Аналогичным образом можно найти длину кривой в трехмерном пространстве. Пусть эта кривая задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причем функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ (кривая l — гладкая). Тогда, проводя те же рассуждения, получим, что

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt.$$

5. Вычисление площади поверхности вращения. Рассмотрим тело, полученное путем вращения кривой

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

вокруг оси Ox. Найдем площадь S боковой поверхности этого тела. Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Как и ранее, положим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$.

Обозначим S_i — площадь боковой поверхности части тела вращения, удовлетворяющей условию: $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i,$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Пример. Вычислим площадь сферы радиуса R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Эту сферу можно получить путем вращения кривой

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R],$$

вокруг оси Ox. Значит,

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

Общая схема применения определенного интеграла: Пусть требуется найти некоторую (например, геометрическую) характеристику сложного объекта. Разбиваем объект на маленькие кусочки. Каждый кусочек аппроксимируем чем-то простым, и вычисляем приближенную искомую характеристику для каждого кусочка. Суммируем характеристики всех кусочков. Устремляя ранг дробления к нулю, нивелируем все погрешности аппроксимации и приходим к точному значению характеристики в виде интеграла.

§ 7. Некоторые механические приложения определенного интеграла

1. Статические моменты и координаты центра тяжести кривой. Пусть имеется материальная точка массы m, удаленная от некоторой прямой на расстояние r. Тогда статическим моментом этой точки относительно данной прямой называется величина $I = mr$. Если имеется несколько материальных точек с массами

$m_1, \ldots, m_n$, удаленными от прямой на расстояния $r_1, \ldots, r_n$, соответственно, то статический момент такой системы точек относительно заданной прямой будет складываться из статических моментов отдельных точек:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i.$$

Предположим теперь, что имеется плоская кривая l:

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

с плотностью $\rho(x, y)$ в точке $(x, y) \in l$. Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a, b]$, и плотность ρ меняется непрерывно вдоль кривой l. Найдем статические моменты I_x, I_y кривой l относительно декартовых осей координат Ox, Oy.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Снова полагаем $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$.

Обозначим I_{xi}, I_{yi} — статические моменты куска кривой, удовлетворяющей условию: $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, относительно осей координат. Тогда с учетом установленных в прошлом параграфе результатов имеем:

$$I_x = \sum_{i=0}^{n-1} I_{xi} \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\rho(\xi_i, f(\xi_i))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i,$$

$$I_y = \sum_{i=0}^{n-1} I_{yi} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\rho(\xi_i, f(\xi_i))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Здесь $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$I_x = \int_a^b f(x)\rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b x\rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Аналогичным образом можно найти массу кривой l:

$$M = \int_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Например, если кривая однородна по массе ($\rho = \mathrm{const}$), то получим $M = \rho L$, где L — длина кривой.

Центром тяжести (центром масс) кривой l называется такая точка $A = (p, q)$, что если всю массу кривой сосредоточить в данной точке, то статические моменты точки относительно осей координат совпадут со статическими моментами всей кривой, т.е.

$$I_x = Mq, \quad I_y = Mp.$$

Отсюда можно найти координаты центра тяжести кривой:

$$p = \frac{\int_a^b x\rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}, \quad q = \frac{\int_a^b f(x)\rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}.$$

По схожей схеме можно вывести формулы для поиска статических моментов и координат центра тяжести для плоских фигур и объемных тел.

2. Работа, совершенная силой по перемещению тела. Пусть тело перемещается прямолинейно вдоль оси Ox от точки a до точки b под действием силы $F(x)$, направленной также вдоль оси Ox. Найдем работу W, совершенную силой.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Как обычно, полагаем $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$.

Обозначим W_i — работу, совершенную силой, по перемещению тела вдоль отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} W_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\Delta x_i,$$

где снова $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Значит,

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Можно вывести и формулу для нахождения работы в случае, когда движение непрямолинейное, а направление силы не совпадает с направлением движения (см. раздел "Криволинейные интегралы").

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 8. Методы приближенного вычисления определенного интеграла

Ранее для вычисления определенного интеграла была выведена формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Здесь $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, а $F(x)$ — ее первообразная. Заметим, однако, что если интеграл $\int f(x)\,dx$ — неберущийся, то найти первообразную $F(x)$ в виде простейшей функции нельзя, и в этом случае формулу Ньютона — Лейбница применить не удастся, во всяком случае, напрямую. В данном параграфе рассмотрим некоторые методы приближенного нахождения определенного интеграла.

1. Формула прямоугольников. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,n$, где $h = (b-a)/n$. Получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h = S_{\text{Л}}.$$

Данная приближенная формула называется формулой левых прямоугольников. Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$, то геометрически формула означает аппроксимацию площади криволинейной трапеции с помощью площадей прямоугольников (см. рисунок 1 а).

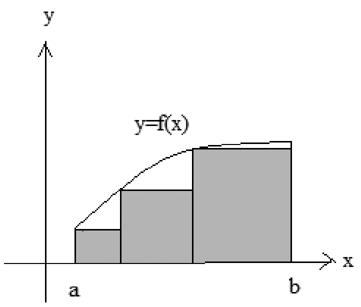

Рис. 1 а.

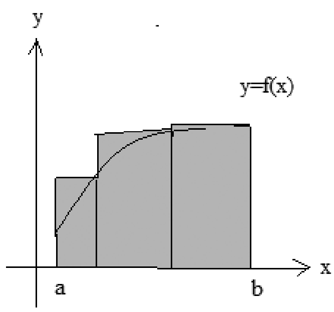

Рис. 1 б.

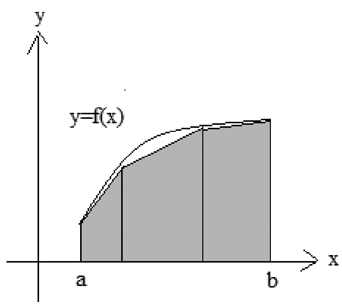

Рис. 1 в.

Аналогично можно использовать и формулу правых прямоугольников (см. рисунок 1 б):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})h = S_{\text{пр}}.$$

Замечание. Если $f(x) \equiv \mathrm{const}$ на отрезке $[a,b]$, то формула прямоугольников (и левых, и правых) даст точный ответ. Константа — это многочлен нулевой степени. Поэтому говорят, что формула прямоугольников имеет алгебраическую степень точности, равную 0.

Оценим погрешность формулы прямоугольников. Для определенности будем рассматривать формулу левых прямоугольников, для правых — все аналогично. Дополнительно предположим, что $f(x)$ — непрерывно-дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция.

Согласно формуле Тейлора, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + f'(\xi_i)(x-x_i)\right)\,dx = S_{\text{Л}} + R_{\text{Л}}.$$

Здесь $\xi_i = \xi_i(x) \in [x_i, x]$ для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$;

$$R_{\text{Л}} = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi_i)(x-x_i)\,dx$$

— искомая погрешность. Пусть $M_1 = \max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$. Тогда

$$|R_{\text{Л}}| \le M_1\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\,dx = M_1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x-x_i)^2}{2}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2}M_1h^2n = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

Видно, что $R_{\text{Л}} \to 0$ при $n \to +\infty$, т.е. формуля прямоугольников позволяет вычислить значение интеграла с люмой необходимой точностью (засчет выбора подходящего значения n).

2. Формула трапеций. Снова разбиваем отрезок $[a,b]$ на n равных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Получаем $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, где $h = (b-a)/n$.

Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ построим уравнение хорды $y = p_ix + q_i$, соединяющей точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, лежащие на графике функции $f(x)$. Имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(p_ix+q_i)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(p_i\frac{x^2}{2} + q_ix\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = S_{\text{ТР}}.$$

Вычисляя значения констант p_i, q_i, $i = 0, \ldots, n-1$, нетрудно доказать, что

$$S_{\text{ТР}} = \frac{S_{\text{Л}} + S_{\text{ПР}}}{2} = \left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)h.$$

Данная приближенная формула называется формулой трапеций. Если $f(x) \ge 0$ при $x \in [a,b]$, то геометрически формула означает аппроксимацию площади криволинейной трапеции с помощью площадей обычных трапеций (см. рисунок 1 в). Говорят, что формула трапеций имеет алгебраическую степень точности, равную 1.

Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, и $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$. Тогда, снова используя формулу Тейлора, нетрудно доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{ТР}} + R_{\text{ТР}},$$

где
$$|R_{\text{тр}}| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$
Скорость стремления погрешности формулы трапеций к нулю при $n \to +\infty$ больше, чем соответствующая скорость для формулы прямоугольников, т.е. формула трапеций — точнее (она дает более точный результат при том же значении n).

3. Формула Симпсона (формула парабол). Выберем четное значение n и разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей:
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$
Снова получим $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, где $h = (b-a)/n$.

Для каждого $i = 0, 2, 4, \ldots, n-2$ построим уравнение параболы
$$y = p_i \frac{x^2}{2} + q_i x + r_i,$$
проходящей через точки $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ и $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$, лежащие на графике функции $f(x)$. Имеем
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0,2,4,\ldots,n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0,2,4,\ldots,n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \left(p_i \frac{x^2}{2} + q_i x + r_i\right) dx =$$
$$= \sum_{i=0,2,4,\ldots,n-2} \left(p_i \frac{x^3}{6} + q_i \frac{x^2}{2} + r_i x\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+2}} = S_{\text{С}}.$$
Вычисляя значения констант p_i, q_i, r_i, $i = 0, 2, 4, \ldots, n-2$, нетрудно доказать, что
$$S_{\text{С}} = \frac{b-a}{3n} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\right) + \right.$$
$$\left. +4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right)\right).$$
Данная приближенная формула называется формулой Симпсона (формулой парабол). Говорят, что она имеет алгебраическую степень точности, равную 2.

Пусть $f(x)$ — четырежды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, и $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$. Тогда нетрудно доказать, что
$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{С}} + R_{\text{С}},$$
где
$$|R_{\text{С}}| \le \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}.$$
Это еще более точная формула, по сравнению с формулами прямоугольников и трапеций.

Отметим, что точность формул приближенного интегрирования можно повышать и далее.

Пример. Рассмотрим интеграл
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0.785398...$$

Выберем $n = 2$. Получаем $h = \frac{1}{2}$. Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Имеем $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$S_{\text{л}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\right) = 0.9,$$

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = 0.65,$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{0.9 + 0.65}{2} = 0.775,$$

$$S_{\text{С}} = \frac{1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = 0.783...$$

Оценим погрешность в формуле прямоугольников (при заданном $n = 2$). Верно:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}, \quad M_1 = \max_{[0,1]} |f'(x)| = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Значит,

$$|R_{\text{л}}| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{(1 - 0)^2}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{32} < \frac{3 \cdot 2}{32} = \frac{3}{16} = 0.18... < 0.2.$$

Аналогично можно оценить погрешности в формулах трапеций и Симпсона.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 9. Несобственные интегралы

Ранее при определении интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ мы предполагали, что отрезок $[a,b]$ — конечный, и функция $f(x)$ — ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих предположений нарушается, то тогда интеграл называется несобственным. Бесконечная область интегрирования называется несобственностью 1-ого рода, а неограниченность функции в окрестности каких-то точек из области интегрирования — несобственностью 2-ого рода.

1. Несобственные интегралы 1-ого рода. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a,A]$ при любом $A \geq a$. Тогда по определению положим:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если предел (1) существует и конечен, то тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Аналогично можно рассмотреть интегралы:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A_1\to-\infty} \int_{A_1}^{a} f(x)\,dx + \lim_{A_2\to+\infty} \int_a^{A_2} f(x)\,dx.$$

Далее для определенности будем рассматривать интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Для интегралов $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ будет все аналогично (кроме того, их можно свести к рассматриваемому случаю с помощью замены переменной: $x := -x$).

Пример. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$$

— сходится.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p},$$

где p — некоторая константа. При $p = 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится. При $p \neq 1$ получим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty}.$$

Видно, что интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p < 1$.

Пример. Пусть задан интеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \sin A.$$

Этот предел вообще не существует (ни конечный, ни бесконечный), т.е. интеграл расходится.

Свойства несобственных интегралов:

1) Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\forall A \geq a$.

2) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx \to 0$ при $A \to +\infty$.

Доказательство свойств 1) и 2) следует из того факта, что

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то будет сходиться и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} Cf(x)\,dx$ при любом значении константы C, причем

$$\int_a^{+\infty} Cf(x)\,dx = C\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

4) Если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся, то будет сходиться и интеграл $\int_a^{+\infty}(f(x) \pm g(x))\,dx$, причем

$$\int_a^{+\infty}(f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Доказательство свойств 3) и 4) следует из арифметических свойств пределов.

Теорема (критерий сходимости Коши). *Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0:\ \forall A_1, A_2 \geq A\ \Rightarrow\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx.$$

Сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ эквивалентна существованию конечного предела $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, а это, в свою очередь, согласно критерию Коши для функций, эквивалентно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0:\ \forall A_1, A_2 \geq A\ \Rightarrow\ |F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon.$$

Остается только заметить, что

$$F(A_2) - F(A_1) = \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \geq a$. Тогда для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ была ограниченной при $A \geq a$.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ неотрицательна на интервале $[a, +\infty)$, то функция $F(A)$ будет монотонно возрастать на интервале $[a, +\infty)$. Значит, предел существует $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$, конечный, если функция $F(A)$ ограничена, и бесконечный — если не ограничена. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Теорема (1-ый признак сравнения). *Пусть $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $x \geq a$. Тогда:*

а) если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то будет сходиться и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$;

б) если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Положим

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx, \quad G(A) = \int_a^A g(x)\,dx.$$

Имеем: $F(A) \geq G(A) \geq 0$ при $A \geq a$. Значит, если $F(A)$ ограничена, то и $G(A)$ ограничена. Аналогично, если $G(A)$ не ограничена, то и $F(A)$ не ограничена. По предыдущей теореме получаем требуемое. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + e^x}.$$

Заметим, что

$$0 \leq \frac{1}{x^2 + e^x} \leq \frac{1}{x^2}$$

при $x \in [1, +\infty)$. Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то значит, и исходный интеграл будет сходиться.

Теорема (2-ой признак сравнения). *Пусть $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \geq a$. Тогда если*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$ и $k \neq \infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \geq a:\ \forall x > A\ \Rightarrow\ \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon, \quad \forall x > A.$$

Без потери общности будем считать, что $0 < \varepsilon < k$. Тогда

$$g(x) < \frac{f(x)}{k - \varepsilon}, \quad f(x) < (k + \varepsilon) g(x).$$

Значит, требуемое следует по 1-ому признаку сравнения. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/\sqrt{1+x^2}}{1/x} = 1,$$

т.е. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$. Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то значит, и исходный интеграл будет расходиться.

Следствие. *Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \geq a$, и*

$$f(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x^p} \quad \textit{при} \quad x \to +\infty.$$

Тогда:

а) если $p > 1$ и $0 \leq \varphi(x) \leq C < +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;

б) если $p \leq 1$ и $\varphi(x) \geq C > 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Пример. Пусть задан интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены степени m и n, соответственно. Пусть многочлен $Q(x)$ не имеет корней на интервале $[a, +\infty)$. Поскольку

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{C}{x^{n-m}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где C — некоторая константа, то рассматриваемый интеграл будет сходиться, если $n > m + 1$, и расходиться, если $n \leq m + 1$.

Определение. *Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Функция $f(x)$ в этом случае называется абсолютно интегрируемой на интервале $[a, +\infty)$.*

Теорема. *Из абсолютной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует его простая сходимость.*

Доказательство. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Тогда по критерию Коши имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0:\ \forall A_2 \geq A_1 \geq A \ \Rightarrow\ \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Значит, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также будет сходиться по критерию Коши. Теорема доказана.

Замечание. Обратная теорема, вообще говоря, не верна (из обычной сходимости абсолютная может и не следовать).

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $[a, +\infty)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом интервале. Тогда функция $f(x)g(x)$ будет абсолютно интегрируемой на интервале $[a, +\infty)$.*

Доказательство. Найдем такое $L \geq 0$, что

$$|g(x)| \leq L, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

Тогда
$$|g(x)f(x)| \leq L|f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$
Отсюда следует требуемое по 1-ому признаку сравнения. Теорема доказана.

Замечание. Признаки сравнения представляют собой простой инструмент для исследования сходимости несобственных интегралов. Однако, они работают только когда под знаком интеграла стоит знакопостоянная функция. Если функция — знакопеременная, то с помощью признаков сравнения можно попытаться доказать абсолютную сходимость (тогда и обычная сходимость также будет иметь место). Но если абсолютной сходимости не будет, то вопрос о простой сходимости останется открытым. В этом случае для анализа сходимости следует использовать более специфические признаки Абеля и Дирихле (см. далее).

Пример. Рассмотрим интеграл
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx.$$
Имеем
$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in [1, +\infty).$$
Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ сходится. Значит, по 1-ому признаку сравнения сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$, а значит, и исходный интеграл.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (продолжение)

§ 9. Несобственные интегралы (продолжение)

Теорема (признак сходимости Дирихле). *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,+\infty)$, интегрируема на отрезке $[a,A]$ при $\forall A \geq a$, причем функция $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ ограничена при $A \geq a$. Пусть также функция $g(x)$ определена и монотонна на интервале $[a,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ будет сходиться.*

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы только для случая, когда функция $f(x)$ — непрерывна на интервале $[a,+\infty)$, а функция $g(x)$ — непрерывно-дифференцируема на этом интервале.

Учитывая теорему Барроу и обобщенную теорему о среднем, а также, применяя формулу интегрирования по частям, для $\forall A_1, A_2 \geq a$ имеем

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = g(x)F(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= g(A_2)F(A_2) - g(A_1)F(A_1) - F(\xi)(g(A_2) - g(A_1)).$$

Здесь ξ — некоторое число, лежащее между A_1 и A_2.

Найдем $L > 0$, такое что $|F(A)| \leq L$, $\forall A \geq a$. Также

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{A} \geq a:\ \forall x \geq \bar{A}\ \Rightarrow\ |g(x)| < \varepsilon.$$

Тогда при $A_1 \geq \bar{A}$, $A_2 \geq \bar{A}$ получим

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \leq 4L\varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится по критерию Коши. Теорема доказана.

Теорема (признак сходимости Абеля). *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,+\infty)$, причем интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Пусть также функция $g(x)$ определена, монотонна и ограничена на интервале $[a,+\infty)$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ будет сходиться.*

Доказательство. Из свойств функции $g(x)$ следует, что $\exists b = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-b)\,dx + b\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Первый интеграл в правой части данного соотношения сходится по признаку Дирихле, а второй — по условиям теоремы. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Этот интеграл сходится по признаку Дирихле (здесь $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$). Отметим, что сходимость — неабсолютная. В самом деле, предположим, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ сходится. Тогда по 1-ому признаку сравнения будет сходиться интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx.$$

Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится по признаку Дирихле, то значит, должен сходиться и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$, а это не так. Полученное противоречие доказывает, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится.

Несобственные интегралы 2-ого рода. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на промежутке $[a, b-\eta]$ при $\forall \eta \in (0, b-a)$, и пусть функция $f(x)$ неограничена в любой левосторонней окрестности точки b. Тогда точку b назовем особой и по определению положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если предел (2) существует и конечен, то тогда интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Аналогично можно рассмотреть случай, когда точка a является особой:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to +0} \int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx,$$

а также случай, когда точка $c \in (a, b)$ — особая:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\eta_1 \to +0} \int_a^{c-\eta_1} f(x)\,dx + \lim_{\eta_2 \to +0} \int_{c+\eta_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Аналогично можно исследовать ситуацию с несколькими особыми точками на промежутке $[a, b]$.

Пример. Вычислим интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2.$$

Данные вычисления не верны, поскольку на промежутке интегрирования $[-1, 1]$ имеется особая точка 0. Надо действовать так:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\eta_1 \to +0} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\eta_1}\right) + \lim_{\eta_2 \to +0} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{\eta_2}^{1}\right).$$

Оба полученных предела бесконечны. Значит, интеграл расходится.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p},$$

где p — некоторая константа. При $p = 1$ имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^1 = \infty,$$

т.е. интеграл расходится. При $p \neq 1$ получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_0^1.$$

Видно, что интеграл сходится, если $p < 1$, и расходится, если $p > 1$.

Далее для определенности будем считать, что на отрезке $[a,b]$ особой является только точка b.

Свойства несобственных интегралов:

1) Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_{b-\eta}^{b} f(x)\,dx$ сходится при $\forall\eta \in (0, b-a)$.

2) Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то $\int_{b-\eta}^b f(x)\,dx \to 0$ при $\eta \to +0$.

3) Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то будет сходиться и интеграл $\int\limits_a^b Cf(x)\,dx$ при любом значении константы C, причем

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

4) Если интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, то будет сходиться и интеграл $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx$, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема (критерий сходимости Коши). *Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall\eta_1,\eta_2 \in (0,\delta)\ \Rightarrow\ \left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим

$$F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx.$$

Сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ эквивалентна существованию конечного предела $\lim\limits_{\eta\to+0} F(\eta)$, а это, в свою очередь, согласно критерию Коши для функций, эквивалентно тому, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0:\ \forall\eta_1,\eta_2 \in (0,\delta)\ \Rightarrow\ |F(\eta_2) - F(\eta_1)| < \varepsilon.$$

Остается только заметить, что

$$F(\eta_2) - F(\eta_1) = \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \geq a$. Тогда для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ была ограниченной при $\eta \in (0, b-a)$.*

Теорема (1-ый признак сравнения). *Пусть $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $x \in [a,b)$. Тогда:*

а) если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то тогда будет сходиться и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$;

б) если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится, то тогда будет расходиться и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема (2-ой признак сравнения). *Пусть $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b)$. Тогда если*

$$\exists \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$ и $k \neq \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Определение. *Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Функция $f(x)$ в этом случае называется абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$.*

Теорема. *Из абсолютной сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует его простая сходимость.*

Аналогично можно сформулировать признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов 2-ого рода.

Отметим также, что несобственные интегралы 1-ого и 2-ого рода могут сводиться друг к другу с помощью замены переменной.

Пример. Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [x = 1/t] = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt.$$

В заключение данного параграфа рассмотрим некоторые примеры на исследование сходимости несобственных интегралов.

Пример. Пусть задан интеграл

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\ln^p x}.$$

Здесь точка 1 — особая. Согласно формуле Тейлора, получаем, что $\ln x \sim (x - 1)$ при $x \to 1$. Интеграл

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(x-1)^p}$$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$. Значит, по 2-ому признаку сравнения аналогичными свойствами будет обладать и исходный интеграл.

Пример. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится по признаку Дирихле. Отметим, что здесь точка 0 особой не является в силу "замечательного" предела.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Учитывая, что $x \ln x \to 0$ при $x \to +0$, несобственности 2-ого рода в данном интеграле не будет. Значит, надо разобраться только с несобственностью 1-ого рода.

Верно: $\forall p > 0$, $\exists a \geq 1$: $\ln x \leq x^p$, $\forall x \geq a$. Тогда

$$\frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \leq \frac{x^{p+1}}{(1+x^2)^2} \sim \frac{1}{x^{3-p}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Выберем $p < 2$. Интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{3-p}}\, dx$ в этом случае будет сходиться. Следовательно, по 1-ому и 2-ому признакам сравнения и исходный интеграл — сходится.

Пример. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^n}\, dx.$$

Здесь есть несобственность 1-ого рода, а если $n > 0$, то и 2-ого (особая точка 0).

При $x \to 0$ получаем $\ln(1+x) \sim x$. Значит,

$$\frac{\ln(x+1)}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Сходимость будет, если $n < 2$.

При $x \to +\infty$ имеем $\ln(x+1) < x^p$, где в качестве p можно выбрать любую положительную постоянную. Значит,

$$\frac{\ln(x+1)}{x^n} \leq \frac{1}{x^{n-p}}.$$

Сходимость будет, если $n - p > 1$. Поскольку величину p можно выбрать произвольно, то достаточно, чтобы выполнялось условие: $n > 1$.

Окончательно имеем, что исходный интеграл будет сходиться, если $1 < n < 2$.

ГЛАВА VII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Сходимость ряда

Пусть задана последовательность вещественных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

называется числовым рядом. Число a_k называется общим членом ряда. Конечная сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется частичной суммой ряда.

Определение. *Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, то ряд (1) называется сходящимся (в противном случае — расходящимся), а величина S называется суммой ряда.*

Согласно данному определению, вопрос сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сводится к вопросу сходимости последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (частичных сумм). Можно и наоборот, вопрос сходимости последовательности свести к вопросу сходимости ряда. В самом деле, пусть задана последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Построим ряд:

$$b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots.$$

Тогда элементы последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будут являться частичными суммами данного ряда (и соответственно, сходимость ряда будет означать сходимость последовательности).

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Здесь

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2,$$

значит, ряд сходится, и его сумма $S = 2$.

Пример. Пусть задан ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Учитывая что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

получаем

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1},$$

и следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1,$$

значит, ряд сходится, и его сумма $S = 1$.

Пример. Для ряда

$$1+2+\ldots+n+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} k$$

получаем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(1+2+\ldots+n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty,$$

т.е. ряд расходится (под суммой ряда здесь можно формально понимать $+\infty$).

Пример. Рассмотрим ряд

$$1-1+1-1+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}.$$

Здесь $S_n = 1$, если n — нечетное, и $S_n = 0$, если n — четное. Таким образом, $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, т.е. ряд расходится (здесь сумма ряда вообще не определена в классическом смысле).

Пример. Ряд вида

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$$

называется гармоническим. Покажем, что он расходится. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n}n = \frac{1}{2}.$$

Тогда при $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$S_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right) >$$

$$> 1+\frac{k}{2} \to +\infty \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

Значит, конечного предела $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ существовать не может, т.е. ряд расходится.

Теорема (критерий сходимости Коши). *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда:*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0:\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сходимость ряда (1) эквивалентна, согласно определению, сходимости последовательности частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$. А это, в соответствии с критерием Коши для последовательностей, эквивалентно условию:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0:\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Учитывая, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k,$$

получаем требуемое. Теорема доказана.

Величина

$$\alpha_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$$

называется остатком ряда (1). Остаток ряда — это тоже ряд. Очевидно, что:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S_n + \alpha_n, \quad \forall n = 1, 2, \ldots .$$

Свойства рядов:

1) Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится его остаток при $\forall n = 1, 2, \ldots$.

2) Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

3) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится к сумме S, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(ca_k)$ будет сходиться к сумме cS ($c = \text{const}$), т.е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

4) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится к сумме $S^{(a)}$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится к сумме $S^{(b)}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k)$ будет сходиться к сумме $S^{(a)} + S^{(b)}$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

Доказательство свойств 1)–4) вытекает из определения сходимости ряда и из свойств пределов последовательностей.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд (1) сходится, то тогда* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Тогда имеем

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty}(S_k - S_{k-1}) = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Указанное необходимое условие сходимости также вытекает из критерия сходимости Коши (достаточно там положить $p = 1$).

Пример. Ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin k$$

расходится, поскольку $\sin k \not\to 0$ при $k \to +\infty$.

Отметим, однако, что условие $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$ только необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное.

Пример. Для гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ необходимое условие сходимости выполнено ($\frac{1}{k} \to 0$ при $k \to +\infty$), но тем не менее, как было доказано выше, ряд расходится.

§ 2. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ назовем знакопостоянным положительным, если $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Аналогично, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ назовем знакопостоянным отрицательным, если $a_k \leq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Поскольку изменение конечного числа слагаемых никак не влияет на сходимость ряда (см. свойство 1 из прошлого параграфа), то ряд можно считать знакопостоянным, если некоторый его остаток знакопостоянен (т.е. конечное число слагаемых противоположного знака не повлияют на анализ сходимости ряда). Учитывая, что нулевые слагаемые не влияют на сумму ряда, то можно считать для знакопостоянного положительного ряда, что $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и аналогично для знакопостоянного отрицательного ряда, что $a_k < 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Также заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-a_k)$$

(см. свойство 3 из предыдущего параграфа), т.е. анализ знакопостоянных положительных рядов можно свести к анализу знакопостоянных отрицательных рядов, и наоборот.

Далее для определенности будем рассматривать знакопостоянные положительные ряды (для знакопостоянных отрицательных рядов все аналогично).

Теорема. *Пусть $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходился необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ его частичных сумм была ограничена.*

Доказательство. Имеем

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n,$$

т.е. последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает. Значит, она имеет конечный предел, если она ограничена, и стремится к $+\infty$, если — неограничена. Отсюда приходим к требуемому. Теорема доказана.

Теорема. *Ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ (сумма геометрической прогрессии), где $x = \mathrm{const} \geq 0$, сходится при $x < 1$ и расходится при $x \geq 1$.*

Доказательство. Если $0 \leq x < 1$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \to \frac{1}{1 - x} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т.е. ряд сходится, и его сумма $S = 1/(1-x)$. При $x \geq 1$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($x^k \not\to 0$ при $k \to +\infty$), т.е. ряд расходится. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$.

Доказательство. Построим частичные суммы:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \qquad T_m = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^m a_{2^m}.$$

При $n \leq 2^m$ получаем

$$S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^m} + \ldots + a_{2^{m+1}-1}) \leq$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^m a_{2^m} = T_m.$$

Аналогично при $n > 2^m$ получим

$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{m-1}+1} + \ldots + a_{2^m}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^m a_{2^m}\right) = \frac{1}{2} T_m.$$

Таким образом, последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{T_m\}_{m=1}^{+\infty}$ либо одновременно ограничены, либо одновременно неограничены. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Теорема. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$, *где* $s = \mathrm{const}$, *сходится при* $s > 1$ *и расходится при* $s \leq 1$.

Доказательство. При $s \leq 0$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Рассмотрим случай $s > 0$. Согласно предыдущей теореме, исследование сходимости заданного ряда можно заменить исследованием сходимости ряда:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^{ks}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k.$$

Получили сумму геометрической прогрессии. По доказанному ранее имеем, что если $\frac{1}{2^{s-1}} < 1$, то ряд сходится, а если $\frac{1}{2^{s-1}} \geq 1$, то — расходится. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Отметим, что при $s = 1$ ряд, рассмотренный в последней теореме, будет являться гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Ранее уже было доказано, что он расходится.

ГЛАВА VII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (продолжение)

§ 2. Признаки сходимости знакопостоянных рядов (продолжение)

Теорема (1-ый признак сравнения). *Пусть $a_k \geq b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда:*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, то будет сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$;

2) если расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$, то будет расходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Доказательство. Положим

$$S_n^{(a)} = a_1 + \ldots + a_n, \quad S_n^{(b)} = b_1 + \ldots + b_n.$$

Получаем, что $S_n^{(a)} \geq S_n^{(b)} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Значит, если последовательность $\{S_n^{(a)}\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, то будет ограничена и последовательность $\{S_n^{(b)}\}_{n=1}^{+\infty}$. И наоборот, если последовательность $\{S_n^{(b)}\}_{n=1}^{+\infty}$ неограничена, то будет неограничена и последовательность $\{S_n^{(a)}\}_{n=1}^{+\infty}$. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Если $a_k \geq b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ называется мажорантным по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ называется минорантным по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k}.$$

Имеем

$$0 \leq \frac{1}{k^2 + k} \leq \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, то значит, будет сходиться и исходный ряд.

Теорема (модифицированный 1-ый признак сравнения). *Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0$, $a_{k+1}/a_k \geq b_{k+1}/b_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда:*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, то будет сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$;

2) если расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$, то будет расходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Доказательство. Для любого $k = 2, 3, \ldots$, имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \geq \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_k}{a_{k-1}} \geq \frac{b_k}{b_{k-1}}.$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$\frac{a_k}{a_1} \geq \frac{b_k}{b_1},$$

откуда вытекает, что

$$a_k \geq \frac{a_1}{b_1} b_k.$$

Поскольку сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a_1}{b_1}\right) b_k = \frac{a_1}{b_1} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$, то тогда требуемое следует из 1-ого признака сравнения. Теорема доказана.

Теорема (2-ой признак сравнения). *Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = p$, причем $p \neq 0$ и $p \neq +\infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.*

Доказательство. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0 : \ \forall k \geq N \ \Rightarrow \ \left|\frac{a_k}{b_k} - p\right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$p - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < p + \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

Согласно условиям теоремы, $p > 0$. Выберем некоторое $\varepsilon \in (0, p)$. Тогда

$$a_k < (p + \varepsilon) b_k, \quad \forall k \geq N,$$

$$b_k < \frac{1}{p - \varepsilon} a_k, \quad \forall k \geq N.$$

Получаем требуемое по 1-ому признаку сравнения. Теорема доказана.

Замечание. Если $p = 0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, а обратное — не обязательно. Если $p = +\infty$, то напротив, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$, а обратное — не обязательно.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/\sqrt{k^2 + 1}}{1/k} = 1.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то значит, будет расходиться и исходный ряд.

Сформулируем далее более специфические признаки сходимости рядов, основанные на сравнении заданного ряда с некоторым конкретным типовым рядом.

Теорема (признак сходимости Коши). *Пусть $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и при этом $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = p$. Тогда:*

1) если $p < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится;

2) если $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится;

3) если $p = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Пусть $p < 1$. Выберем некоторое $p < b < 1$. Можно указать такое $N > 0$, что $\sqrt[k]{a_k} < b$ для $\forall k \geq N$. Получаем, что

$$a_k \leq b^k, \quad \forall k \geq N.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b^k$ сходится (геометрическая прогрессия), то по 1-ому признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

При $p > 1$ можно указать такое $\tilde{N} > 0$, что $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ для $\forall k \geq \tilde{N}$, а тогда получим, что $a_k \not\to 0$ при $k \to +\infty$, т.е. не будет выполнено необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Наконец, нетрудно проверить, что для рядов $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ получим $p = 1$. Но при этом первый из этих рядов сходится, а второй — расходится. Теорема доказана.

Замечание. Предел $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$ в признаке Коши можно заменить верхним пределом $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Поэтому признак можно использовать, даже если последовательность $\{\sqrt[k]{a_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ расходящаяся.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит, ряд сходится.

Теорема (признак сходимости Даламбера). *Пусть $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и при этом $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p$. Тогда:*

1) если $p < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится;

2) если $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится;

3) если $p = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Пусть $p < 1$. Выберем некоторое $p < b < 1$. Можно указать такое $N > 0$, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} < b$ для $\forall k \geq N$. Получаем для некоторого $k \geq N$, что

$$a_{k+1} < b a_k, \quad a_{k+2} < b a_{k+1} < b^2 a_k, \quad \ldots, \quad a_{k+r} < b^r a_k, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\sum_{r=1}^{+\infty} a_{k+r} < a_k \sum_{r=1}^{+\infty} b^r.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} b^r$ сходится (геометрическая прогрессия), то по 1-ому признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

При $p > 1$ можно указать такое $\tilde{N} > 0$, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ для $\forall k \geq \tilde{N}$, а тогда получим, что $a_k \not\to 0$ при $k \to +\infty$, т.е. не будет выполнено необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Наконец, снова для рядов $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ получим $p = 1$. Но при этом первый из этих рядов сходится, а второй — расходится. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве сходимости по признаку Даламбера (пункт 1 теоремы) предел $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ можно заменить верхним пределом $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. А при доказательстве расходимости по признаку Даламбера (пункт 2 теоремы) предел $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ можно заменить нижним пределом $\underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ (подробнее см. далее признак Куммера).

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится.

Признаки Коши и Даламбера сравнивают исследуемый ряд с геометрической прогрессией $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b^k$. Признак Коши более мощный по сравнению с признаком Даламбера, но признак Даламбера во многих случаях проще для использования. Если эти признаки не сработали (получили $p = 1$), то тогда надо проводить сравнение с каким-то другим рядом. Например, следующий признак Раабе сравнивает исследуемый ряд с рядом вида $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ ($s = \text{const}$).

Теорема (признак сходимости Раабе). *Пусть $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и при этом $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = p$. Тогда:*

1) если $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится;

2) если $p < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится;

3) если $p = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Выберем некоторое $p > b > 1$. Можно указать такое $N_1 > 0$, что $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > b$ для $\forall k \geq N_1$. Отсюда для $k \geq N_1$ имеем

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 + \frac{b}{k}.$$

Найдем s: $b > s > 1$. Поскольку

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s - 1}{\frac{1}{k}} = s,$$

то можно указать такое $N_2 > 0$, что

$$\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s - 1}{\frac{1}{k}} < b, \quad \forall k \geq N_2.$$

Отсюда для $k \geq N_2$ имеем

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^s < 1 + \frac{b}{k}.$$

Пусть $N = \max\{N_1,\, N_2\}$. Тогда при $k \geq N$ верно:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^s < 1 + \frac{b}{k} < \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Значит,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1/(k+1)^s}{1/k^s}, \quad \forall k \geq N.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ сходится (при $s > 1$), то по модифицированному 1-ому признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

При $p < 1$ можно указать такое $\tilde{N} > 0$, что $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \leq 1$ для $\forall k \geq \tilde{N}$, а тогда получим, что

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{1/(k+1)}{1/k}, \quad \forall k \geq \tilde{N}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ расходится (гармонический ряд). Тогда по модифицированному 1-ому признаку сравнения будет расходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве сходимости по признаку Раабе (пункт 1 теоремы) предел $\lim\limits_{k\to+\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ можно заменить нижним пределом $\underline{\lim}_{k\to+\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$. А при доказательстве расходимости по признаку Раабе (пункт 2 теоремы) предел $\lim\limits_{k\to+\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ можно заменить верхним пределом $\overline{\lim}_{k\to+\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$ (подробнее см. далее признак Куммера).

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)}\right)^m,$$

где $m = \mathrm{const}$. Признаки Коши и Даламбера здесь не работают (получим $p = 1$). Применим признак Раабе:

$$\lim_{k\to+\infty} k\left(\frac{(2k+2)^m}{(2k+1)^m} - 1\right) = \lim_{k\to+\infty} k\frac{(2k+2)^m - (2k+1)^m}{(2k+1)^m} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} k \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^m - \left(1+\frac{1}{2k}\right)^m}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^m} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} k \frac{(1+\frac{m}{k}+\ldots) - (1+\frac{m}{2k}+\ldots)}{1+\frac{m}{2k}+\ldots} = \frac{m}{2}.$$

Значит, при $m > 2$ ряд сходится, а при $m < 2$ — расходится. В случае, когда $m = 2$, признак Раабе не работает (ряд нуждается в дополнительном исследовании).

ГЛАВА VII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (продолжение)

§ 2. Признаки сходимости знакопостоянных рядов (продолжение)

Обычно для анализа сходимости ряда сначала пытаются применить простые признаки Коши или Даламбера. Если они не срабатывают, то тогда применяют признак Раабе. Если и с ним возникает проблема, то нужно задействовать еще более специфические признаки. Общая схема построения признаков сходимости рядов описывается следующей теоремой Куммера.

Теорема (признак сходимости Куммера). *Пусть* $a_k > 0$, $c_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{c_k}$ *расходится, и пусть*

$$A_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда:

1) если $\exists \delta > 0$, $\exists N > 0$: $A_k \geq \delta$, $\forall k \geq N$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) если $\exists N > 0$: $A_k \leq 0$, $\forall k \geq N$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1) Имеем

$$c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} \geq \delta, \quad \forall k \geq N.$$

Отсюда

$$c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1} \geq \delta a_{k+1} > 0, \quad \forall k \geq N. \tag{1}$$

Значит, последовательность $\{c_k a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ монотонно убывает (по крайней мере при больших индексах). При этом она ограничена снизу (нулем). Следовательно,

$$\exists \lim_{k \to +\infty} c_k a_k = I.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}).$$

Он сходится, поскольку последовательность его частичных сумм сходится:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}) = \lim_{n \to +\infty} (c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}) = c_1 a_1 - I.$$

Тогда из соотношения (1) по 1-ому признаку сравнения получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится.

2) Имеем

$$c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} \leq 0, \quad \forall k \geq N.$$

Отсюда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{1/c_{k+1}}{1/c_k}.$$

Тогда получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ расходится по модифицированному 1-ому признаку сравнения. Теорема доказана.

Замечание. Условие расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{c_k}$ использовалось только при доказательстве утверждения 2 теоремы Куммера. Для применения утверждения 1 выполнение данного условия не обязательно.

Следствие. *Пусть* $a_k > 0$, $c_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{c_k}$ *расходится,*

$$A_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и пусть

$$\exists \lim_{k\to+\infty} A_k = p.$$

Тогда:

1) если $p > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) если $p < 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится;*

3) если $p = 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Замечание. Для доказательства сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ (утверждение 1 следствия) вместо предела $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ можно использовать нижний предел $\underline{\lim}_{k\to+\infty} A_k$. А для доказательства расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ (утверждение 2 следствия) вместо предела $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ можно использовать верхний предел $\overline{\lim}_{k\to+\infty} A_k$.

Замечание. Если в признаке Куммера положить $c_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то придем к признаку Даламбера. Если положить $c_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$, то получим признак Раабе.

Если в теореме Куммера взять $c_k = k \ln k$, $k = 1, 2, \ldots$, то это будет признак Бертрана. В этом случае:

$$A_k = k \ln k \frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1)\ln(k+1) =$$

$$= \ln k \left[k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k+1}.$$

Следствие (признак сходимости Бертрана). *Пусть* $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *и при этом*

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \ln k \left[k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right] = p.$$

Тогда:

1) если $p > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) если $p < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится;*

3) если $p = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *может как сходиться, так и расходиться.*

В формулировке признака Бертрана также соответствующий предел может быть заменен на нижний предел (при доказательстве сходимости), либо на верхний предел (при доказательстве расходимости).

Теорема (признак сходимости Гаусса). *Пусть $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^2},$$

где λ и μ — некоторые константы, а последовательность $\{\theta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — ограничена. Тогда:

1) если $\lambda > 1$ или если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится;*

2) если $\lambda < 1$ или если $\lambda = 1$ и $\mu \le 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *расходится.*

Если $\lambda \neq 1$, то доказательство признака Гаусса вытекает из признака Даламбера. При $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$ требуемое следует из признака Раабе. Наконец, если $\lambda = \mu = 1$, то получим расходимость по признаку Бертрана.

Все выписанные выше признаки сходимости рядов (Коши, Даламбера, Раабе, Бертрана, Куммера, Гаусса) выводились на основе сравнения изучаемого ряда с некоторым типовым рядом. Рассмотрим далее отдельный признак Коши — Макларена, основанный на сравнении изучаемого ряда с некоторым несобственным интегралом.

Теорема (интегральный признак сходимости Коши — Макларена). *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, неотрицательна, монотонно убывает на интервале $[1, +\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда если $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Доказательство. Имеем

$$a_{k+1} \le f(x) \le a_k, \quad \text{при} \quad x \in [k, k+1], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Проинтегрируем эти неравенства по промежуткам $[k, k+1]$:

$$a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x) \le a_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и просуммируем по $k = 1, \ldots, n$. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ и функция $F(A) = \int_1^A f(x)\,dx$, $A \ge 1$, либо одновременно ограничены, либо одновременно неограничены. Учитывая неотрицательность функции $f(x)$ на промежутке $[1, +\infty)$, и соответственно, неотрицательность слагаемых a_k, $k = 1, 2, \ldots$, отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Пример. Снова рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s},$$

где $s = \text{const} > 0$. Его сходимость (расходимость) эквивалентна сходимости (расходимости) интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}.$$

Соответственно, при $s > 1$ эти ряд и интеграл сходятся, а при $s \leq 1$ — расходятся.

Пример. Сходимость (расходимость) ряда

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^s k},$$

где $s = \text{const} > 0$, эквивалентна сходимости (расходимости) интеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^s x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^s x}.$$

Снова имеем, что при $s > 1$ эти ряд и интеграл сходятся, а при $s \leq 1$ — расходятся.

§ 3. Признаки сходимости знакопроизвольных рядов

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, где слагаемые a_k, $k = 1, 2, \ldots$, могут быть разного знака. Без потери общности будем считать, что число положительных и отрицательных слагаемых ряда бесконечно (в противном случае ряд можно рассматривать как знакопостоянный).

Определение. *Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$.*

Теорема. *Из абсолютной сходимости ряда следует его простая сходимость.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ сходится. Тогда по критерию Коши имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

т.е. критерий Коши будет выполнен и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$. Теорема доказана.

Замечание. Обратная теорема, вообще говоря, не верна, т.е. из обычной сходимости абсолютная может и не следовать. В этом случае говорят, что ряд сходится неабсолютно (условно).

Замечание. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ знакопостоянный, то для анализа абсолютной сходимости можно использовать все признаки из предыдущего параграфа.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k \sin k}{k!}.$$

Имеем
$$\left|\frac{2^k\sin k}{k!}\right| = \frac{2^k|\sin k|}{k!} \leq \frac{2^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ сходится по признаку Даламбера. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{2^k\sin k}{k!}\right|$ будет сходиться по 1-ому признаку сравнения. Значит, исходный ряд также сходится (абсолютно).

Для исследования неабсолютной сходимости признаки из предыдущего параграфа применить не получится. Далее рассмотрим некоторые более сложные признаки, которые можно применять для знакопроизвольных рядов.

Теорема (признак сходимости Лейбница). *Знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}c_k$, *где* $c_1 > c_2 > \ldots > 0$, *и* $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k = 0$, *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда с четными номерами:
$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}), \quad m = 1, 2, \ldots .$$
Поскольку каждая скобка в данном выражении положительна, то значит, последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает. Также заметим, что она ограничена сверху:
$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1, \quad m = 1, 2, \ldots .$$
Следовательно: $\exists S = \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m}$.

Рассмотрим теперь частичные суммы ряда с нечетными номерами:
$$S_{2m+1} = S_{2m} + c_{2m+1}.$$
Учитывая, что $\lim\limits_{m\to+\infty} c_{2m+1} = 0$, получаем, что $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m+1} = S$.

Вся последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда образована путем слияния двух подпоследовательностей $\{S_{2m}\}_{m=1}^{+\infty}$ и $\{S_{2m+1}\}_{m=0}^{+\infty}$. Раз эти подпоследовательности сходятся к одному пределу S, то тогда и вся последовательность будет сходиться туда же. Теорема доказана.

Замечание. Для знакочередующего ряда верна следующая оценка суммы ряда:
$$S_{2m} < S < S_{2m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Пример. Ряд
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$
сходится по признаку Лейбница. Заметим, что сходимость неабсолютная (гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ расходится). Оценим сумму ряда. Получаем:
$$1 - \frac{1}{2} < S < 1,$$
т.е. $0.5 < S < 1$. Уточним оценку:
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < S < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$
откуда имеем $0.58 < S < 0.84$. Продолжая процесс, можно найти сумму S с любой требуемой точностью.

ГЛАВА VII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (продолжение)

§ 3. Признаки сходимости знакопроизвольных рядов (продолжение)

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k.$$

Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Лемма. *Для любых $0 \le p \le q$ верно:*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{1}$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Лемма доказана.

Замечание. Формула (1) представляет собой дискретный аналог формулы интегрирования по частям.

Теорема (признак сходимости Дирихле). *Пусть последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, а последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ монотонна, и $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы:

$$\exists M > 0: \ |A_n| \le M, \ \forall n = 1, 2, \ldots,$$

а также

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0: \ \forall k \ge N \ \Rightarrow \ |b_k| < \varepsilon.$$

Для любых $N \le p \le q$ по формуле (1) получим

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k b_k \right| \le M \left(\sum_{k=p}^{q-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_q| + |b_p| \right).$$

Учитывая монотонность последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$, находим, что

$$\sum_{k=p}^{q-1} |b_k - b_{k+1}| = \left| \sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) \right| = |b_p - b_q| \le |b_p| + |b_q|.$$

Значит,
$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| \le 2M(|b_p| + |b_q|) < 4M\varepsilon, \quad \forall q \ge p \ge N.$$
Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ сходится по критерию Коши. Теорема доказана.

Теорема (признак сходимости Абеля). *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится, а последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *монотонна и ограничена. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы:
$$\exists b = \lim_{k \to +\infty} b_k.$$
Тогда
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (b_k - b + b) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (b_k - b) + b \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$
Первый из полученных рядов сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию теоремы. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Признак сходимости Лейбница является частным случаем признака Дирихле. В самом деле, пусть задан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} c_k$, где $c_1 > c_2 > \ldots > 0$, и $\lim\limits_{k \to +\infty} c_k = 0$. Тогда достаточно положить $a_k = (-1)^{k-1}$, $b_k = c_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и придем к признаку Дирихле.

Пример. Ряд
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots$$
сходится по признаку Дирихле.

§ 4. Аналитические свойства знакопроизвольных рядов

Конечная сумма чисел, согласно аксиомам сложения, обладает ассоциативностью и коммутативностью. Исследуем, сохраняются ли эти аксиомы для бесконечной суммы.

Теорема. *Пусть ряд*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{1}$$
сходится. Тогда для любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *ряд*
$$(a_1 + \ldots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + \ldots + a_{m_2}) + \ldots + (a_{m_{n-1}+1} + \ldots + a_{m_n}) + \ldots \tag{2}$$
также будет сходиться, причем сумма ряда (2) совпадет с суммой ряда (1).

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы рядов (1) и (2):
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$A_n = (a_1 + \ldots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + \ldots + a_{m_2}) + \ldots + (a_{m_{n-1}+1} + \ldots + a_{m_n}).$$

Нетрудно заметить, что $A_n = S_{m_n}$, т.е. последовательность частичных сумм ряда (2) является подпоследовательностью частичных сумм ряда (1). Тогда если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = S$. Получили требуемое. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что для сходящихся рядов справедлив сочетательный закон сложения (ассоциативность). Отметим, что обратная теорема, вообще говоря, не верна, т.е. из сходимости ряда (2) сходимость ряда (1) может и не следовать.

Пример. Ряд

$$(1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$$

сходится. В то же время ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

расходится.

Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \hat{a}_k, \tag{3}$$

полученный путем некоторой перестановки слагаемых ряда (1) (т.е. $\hat{a}_k = a_m$, и соответствие между индексами k и m — взаимнооднозначное).

Теорема. *Пусть ряд (1) сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка (3) также будет сходиться, причем к той же самой сумме.*

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что для знакопостоянного ряда обычная сходимость эквивалентна абсолютной (добавление знака модуля к слагаемым ряда ничего не меняет). Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Пусть ряд (1) сходится, т.е. $\exists S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Имеем:

$$\forall n > 0,\ \exists m > 0:\ \hat{S}_n \leq S_m, \tag{4}$$

и наоборот,

$$\forall n > 0,\ \exists p > 0:\ S_n \leq \hat{S}_p, \tag{5}$$

Из сходимости ряда (1) следует ограниченность последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Но тогда, в силу (4), (5), и последовательность $\{\hat{S}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда (3) будет ограничена. Значит, и ряд (3) сходится. Переходя к пределу при $n \to +\infty$ в формулах (4), (5), получим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{S}_n = S$.

2) Рассмотрим теперь знакопроизвольный ряд (1). Обозначим: $p_1, p_2, \ldots$ — положительные слагаемые ряда (1), $q_1, q_2, \ldots$ — отрицательные слагаемые ряда (1) (в обоих этих случаях элементы последовательностей располагаем в порядке возрастания номеров). Пусть

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k, \quad Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k.$$

Последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно растет, а последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно убывает. Значит,

$$\exists P = \lim_{n\to+\infty} P_n, \qquad \exists Q = \lim_{n\to+\infty} Q_n.$$

Имеем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = P_r + Q_l \to S = P + Q \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = P_r - Q_l \to \bar{S} = P - Q \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

(здесь значения индексов r и l зависят от значения n). Поскольку $S \neq \infty$ и $\bar{S} \neq \infty$ (ряд (1) сходится абсолютно), то получаем, что $P \neq \infty$, $Q \neq \infty$.

Зададим некоторую перестановку (3). Обозначим $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots$ — положительные слагаемые ряда (3), $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots$ — отрицательные слагаемые ряда (3) (в обоих этих случаях элементы последовательностей располагаем в порядке возрастания номеров). Пусть

$$\hat{P}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{p}_k, \quad \hat{Q}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{q}_k.$$

Из результатов пункта 1) доказательства следует, что

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{P}_n = P, \qquad \lim_{n \to +\infty} \hat{Q}_n = Q.$$

Тогда

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k = P_{\hat{r}} + Q_{\hat{l}} \to P + Q = S \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

(здесь значения индексов $\hat{r}$ и $\hat{l}$ зависят от значения n). Получили, что ряд (3) сходится к S. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что для абсолютно сходящихся рядов справедлив переместительный закон сложения (коммутативность). Отметим, что если ряд (1) сходится неабсолютно, то теорема будет, вообще говоря, не верна (перестановка может оказаться расходящейся или сходящейся к другой сумме)

Пример. Рассмотрим ряд

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Он сходится по признаку Лейбница, но неабсолютно. Имеем

$$S = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \ldots < 1.$$

Зададим перестановку:

$$\hat{S} = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}) + \ldots.$$

Получим $\hat{S} > 1$.

Теорема (Риман). *Если ряд (1) сходится неабсолютно, то для любого значения L, конечного или бесконечного, найдется такая перестановка (3), которая будет сходиться к L.*

Доказательство. Снова обозначим $p_1, p_2, \ldots$ — положительные слагаемые ряда (1), $q_1, q_2, \ldots$ — отрицательные слагаемые ряда (1),

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k, \quad Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k,$$

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n, \qquad Q = \lim_{n\to+\infty} Q_n.$$

Имеем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = P_r + Q_l \to S = P + Q \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = P_r - Q_l \to \bar{S} = P - Q \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

(здесь значения индексов r и l зависят от значения n). Поскольку $S \neq \infty$ и $\bar{S} = +\infty$ (ряд (1) сходится неабсолютно), то получаем, что $P = +\infty$, $Q = -\infty$.

1) Пусть $L \neq \infty$. Можно указать такие номера $k_1, k_2, \ldots$, что:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1-1} \leq L, \qquad p_1 + \ldots + p_{k_1} > L,$$

$$(p_1 + \ldots + p_{k_1}) + (q_1 + \ldots + q_{k_2-1}) \geq L, \qquad (p_1 + \ldots + p_{k_1}) + (q_1 + \ldots + q_{k_2}) < L,$$

и т.д. Тогда полученная перестановка:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + \ldots + q_{k_2} + \ldots$$

будет сходиться к L.

2) По аналогичному принципу можно рассмотреть случай, когда $L = \pm\infty$.

Теорема доказана.

Теорема (Мертенс) (об умножении рядов). *Пусть ряды*

$$S_a = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \qquad S_b = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \tag{6}$$

сходятся, причем хотя бы один из этих рядов сходится абсолютно. Тогда ряд

$$S_c = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \tag{7}$$

будет сходиться, причем получим

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и при этом

$$S_c = S_a S_b. \tag{8}$$

Отметим, что если оба ряда (6) сходятся неабсолютно, то ряд (7), полученный путем их перемножения, может оказаться как сходящимся (в этом случае его сумма также будет вычисляться по формуле (8)), так и расходящимся.

ГЛАВА VIII. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Понятие равномерной сходимости

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие функция $f_n(x)$, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве X задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Подставляя некоторое $x = x_0 \in X$, получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$.

Определение. *1) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной на множестве X, если:*

$$\forall x \in X,\ \exists M \geq 0 :\ |f_n(x)| \leq M,\ \forall n = 1, 2, \ldots .$$

2) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ называется равномерно ограниченной на множестве X, если:

$$\exists M \geq 0 :\ |f_n(x)| \leq M,\ \forall n = 1, 2, \ldots,\ \forall x \in X.$$

В случае простой ограниченности значение константы M в указанном определении зависит, вообще говоря, от выбора точки $x \in X$. При равномерной ограниченности на множестве X значение данной константы можно выбрать единое для всех $x \in X$. Очевидно, что равномерная ограниченность — более сильное понятие по сравнению с простой ограниченностью.

Пример. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$. Последовательность $\{x \sin n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена на X, но неравномерно (можно положить $M = |x|$). А, например, последовательность $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена на X (можно положить $M = 1$).

Определение. *1) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ называется сходящейся в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$.*

2) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ называется сходящейся на множестве X к функции $f(x)$ при $n \to +\infty$ (пишут: $f_n(x) \to f(x)$), если

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

3) Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ называется равномерно сходящейся на множестве X к функции $f(x)$ при $n \to +\infty$ (пишут: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

В случае простой сходимости значение константы N в указанном определении зависит, вообще говоря, от выбора точки $x \in X$. При равномерной сходимости на множестве X значение данной константы можно выбрать единое для всех $x \in X$. Очевидно, что равномерная сходимость — более сильное понятие по сравнению с простой сходимостью.

Пример. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$. Последовательность $\{\frac{x}{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к функции $f(x) = 0$ при $n \to +\infty$ на множестве X, но неравномерно (можно положить $N = \left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right] + 1$). А, например, последовательность $\{\frac{\sin x}{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к функции $f(x) = 0$ при $n \to +\infty$ равномерно на множестве X (можно положить $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$).

Теорема (критерий равномерной сходимости Коши). *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ будет равномерно сходиться на множестве X к некоторой конечной функции при $n \to +\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to +\infty$ на множестве X. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Отсюда

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Значит, выполнен критерий равномерной сходимости Коши.

Достаточность. Согласно критерию сходимости Коши для числовых последовательностей, найдется такая конечная функция $f(x)$, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to +\infty$ на множестве X. Покажем, что эта сходимость будет равномерной. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N,\ \forall p > 0\ \Rightarrow\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X.$$

Пришли к требуемому. Теорема доказана.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). *Пусть $\exists c_n = \mathrm{const}$: $|f_n(x) - f(x)| \leq c_n$, $\forall x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $c_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to +\infty$ на множестве X.*

Доказательство. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N\ \Rightarrow\ c_n < \varepsilon.$$

Но тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$, $x \in X = (-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$, $\forall x \in X$, то значит, $f_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на множестве X.

Пусть на множестве X задана функциональная последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ называется функциональным рядом. Подставляя некоторое $x = x_0 \in X$, получим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x_0)$. Величина $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется частичной суммой функционального ряда.

Определение. *1) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ называется сходящимся в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующий числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x_0)$.*

2) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ называется сходящимся на множестве X к сумме $S(x)$, если $S_n(x) \to S(x)$ при $n \to +\infty$ на множестве X.

3) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *называется равномерно сходящимся на множестве* X *к сумме* $S(x)$, *если* $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ *при* $n \to +\infty$ *на множестве* X.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Предположим сначала, что $x \in [0,\rho]$, где $\rho < 1$. Получаем

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to S(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \forall x \in [0,\rho].$$

Покажем, что сходимость равномерная. Действительно,

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \le \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \forall x \in [0,\rho].$$

Следовательно, $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ при $n \to +\infty$ на отрезке $[0,\rho]$ (по признаку Вейерштрасса), и соответственно, заданный ряд сходится равномерно в области $[0,\rho]$.

Предположим теперь, что $x \in [0,1)$. Покажем, что в этом случае равномерной сходимости не будет. От противного, пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлось $N > 0$, такое что при $\forall n \ge N$ имеем

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1).$$

Устремляя $x \to 1-0$, придем к противоречию. Значит, заданный ряд сходится неравномерно в области $[0,1)$.

Величину $\alpha_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ назовем остатком функционального ряда. Имеем

$$S(x) = S_n(x) + \alpha_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Верно:

1) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на множестве X тогда и только тогда, когда равномерно сходится на этом множестве любой его остаток.

2) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на множестве X, то $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на этом множестве.

3) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на множестве X, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(cu_k(x)) = c\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

также будет равномерно сходиться на множестве X при любой константе c.

4) Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$ равномерно сходятся на множестве X, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(u_k(x) + v_k(x)) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$$

также будет равномерно сходиться на множестве X.

Теорема (критерий равномерной сходимости Коши). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится на множестве* X *тогда и только тогда, когда:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0: \ \forall n \geq N, \ \forall p > 0 \ \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Доказательство теоремы следует из критерия равномерной сходимости Коши для функциональных последовательностей.

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *равномерно сходился на множестве* X, *необходимо выполнение условия:* $u_k(x) \rightrightarrows 0$ *при* $k \to +\infty$ *на множестве* X.

Для доказательства следствия достаточно положить $p = 0$ в критерии равномерной сходимости Коши.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). *Пусть* $\exists c_k = \text{const}$*:* $|u_k(x)| \leq c_k$, $\forall x \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ *сходится. Тогда функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *будет равномерно сходиться на множестве* X.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ будет абсолютно сходиться на множестве X по 1-ому признаку сравнения. Покажем, что сходимость будет равномерной на X. Согласно критерию Коши для числовых рядов:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0: \ \forall n \geq N, \ \forall p > 0 \ \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Значит, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X по критерию равномерной сходимости Коши. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$. Пусть $x \in [0, \rho]$, где $\rho < 1$. Получаем $|x^k| \leq \rho^k$, $\forall x \in [0, \rho]$, $k = 1, 2, \ldots$. Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \rho^k$ сходится (геометрическая прогрессия), а следовательно, исходный функциональный ряд сходится равномерно на отрезке $[0, \rho]$.

Если к функциональному ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ оказался применим признак равномерной сходимости Вейерштрасса, то этот ряд будет сходиться абсолютно. Кроме того, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |u_k(x)|$ также будет равномерной. Между тем, бывают случаи, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ сходится равномерно, но неабсолютно. Также возможна ситуация, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ сходится равномерно и абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |u_k(x)|$ сходится неравномерно. В таких случаях признак Вейерштрасса в принципе не применим, и приходится задействовать более тонкие признаки Дирихле и Абеля.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x).$$

Обозначим

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Теорема (признак равномерной сходимости Дирихле). *Пусть последовательность $\{A_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена на X, а последовательность $\{b_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ монотонна по k при всех $x \in X$, и $b_k(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to +\infty$ на X. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.*

Теорема (признак равномерной сходимости Абеля). *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на X, а последовательность $\{b_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ монотонна по k при всех $x \in X$ и равномерно ограничена на X. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.*

Пример. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}.$$

Этот ряд сходится (неабсолютно) при всех $x \in X$ по признаку Лейбница. Исследуем остаток ряда

$$\alpha_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}.$$

Имеем

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \forall x \in X.$$

Значит, $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на X по признаку Вейерштрасса (признак Вейерштрасса мы здесь применяем к последовательности $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$; к самому ряду признак Вейерштрасса не применим, поскольку ряд сходится неабсолютно). Следовательно, рассматриваемый ряд сходится равномерно на X. Также можно было для доказательства равномерной сходимости ряда в данном примере применить признак равномерной сходимости Дирихле (достаточно положить $a_k(x) = (-1)^{k-1}$, $b_k(x) = \frac{1}{x^2+k}$, $k = 1, 2, \ldots$).

Пример. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(x^2+1)^k}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^k} = x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^k$$

сходится при всех $x \in X$ (геометрическая прогрессия), однако, сходимость — неравномерная на X (поскольку величина $\frac{1}{x^2+1}$ хоть и меньше 1 при $x \neq 0$, но не отделена от 1 — см. пример ранее). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. Но равномерную сходимость исходного ряда по признаку Вейерштрасса доказать не получится. Тем не менее, эта самая равномерная сходимость будет иметь место по признаку Дирихле (достаточно положить $a_k(x) = (-1)^{k-1}$, $b_k(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^k}$, $k = 1, 2, \ldots$). Также равномерную сходимость исходного ряда можно обосновать, применив признак Вейерштрасса к остаткам ряда $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ и доказав, что $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на X.

ГЛАВА VIII. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§ 2. Арифметические свойства функциональных рядов и последовательностей

Для конечной суммы функций $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ справедливы следующие арифметические свойства:

1) если функции $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ непрерывны на множестве X, то тогда и их сумма $S_n(x)$ будет непрерывной функцией на X;

2) если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} u_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, где x_0 — предельная точка множества X, то тогда

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} u_k(x);$$

3) если функции $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ интегрируемы на множестве X, то тогда

$$\int S_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int u_k(x)\,dx;$$

4) если функции $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ дифференцируемы на множестве X, то тогда

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x).$$

Исследуем вопрос: сохраняются ли данные свойства для бесконечной суммы функций $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$?

Теорема (о непрерывности суммы ряда). *Пусть функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывны на множестве X, и ряд $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X. Тогда сумма $S(x)$ данного ряда будет непрерывна на множестве X.*

Доказательство. Выберем произвольное $x_0 \in X$. Согласно равномерной сходимости ряда на X, имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0:\ \forall n \geq N\ \Rightarrow\ |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Здесь $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ — частичная сумма ряда.

Функция $S_N(x)$ непрерывна в точке x_0 (как конечная сумма непрерывных функций). Тогда

$$\exists \delta > 0:\ \forall x \in X:\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |S_N(x) - S_N(x_0)| < \varepsilon.$$

В результате получаем неравенство:

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| < 3\varepsilon,$$

верное для $\forall x \in X$: $|x - x_0| < \delta$. Значит, $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$, т.е. функция $S(x)$ непререрывна в точке x_0. Теорема доказана.

Замечание. Если функциональный ряд с непрерывными слагаемыми сходится неравномерно на некотором множестве, то его сумма может оказаться разрывной функцией на этом множестве.

Пример. В предыдущем параграфе было показано, что ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^k}$$

сходится неравномерно на множестве $X = (-\infty, +\infty)$. Нетрудно проверить, что $S(x) = 1$ при $x \neq 0$, и $S(0) = 0$. Таким образом, функция $S(x)$ терпит устранимый разрыв в точке $x = 0$.

Замечание. Равномерная сходимость ряда с непрерывными слагаемыми является только достаточным условием непрерывности суммы, но не необходимым. Однако, например, если $X = [a, b]$, и $u_k(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots$, то тогда равномерная сходимость ряда будет также представлять собой и необходимое условие непрерывности суммы.

Теорема (о предельном переходе для рядов). *Пусть функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывны на множестве X, точка x_0 является предельной точкой множества X, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = c_k$, и ряд $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X. Тогда ряд $C = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ будет сходиться, причем $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = C$, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x).$$

Доказательство. Согласно критерию равномерной сходимости Коши, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0 : \ \forall n \geq N, \ \forall p > 0 \ \Rightarrow \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq N, \ \forall p > 0.$$

Значит, ряд $C = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ будет сходиться по критерию Коши для числовых рядов.

Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad \alpha_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x),$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k, \quad \gamma_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k.$$

Тогда

$$S(x) = S_n(x) + \alpha_n(x), \quad C = C_n + \gamma_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда

$$|S(x) - C| \leq |S_n(x) - C_n| + |\alpha_n(x)| + |\gamma_n|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также то, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходятся (причем функциональный ряд сходится равномерно), получаем:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\bar{N} > 0 :\ |\alpha_{\bar{N}}(x)| < \varepsilon,\ |\gamma_{\bar{N}}| < \varepsilon,\ \forall x \in X,$$

а также:

$$\exists\delta > 0 :\ \forall x \in X :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |S_{\bar{N}}(x) - C_{\bar{N}}| < \varepsilon.$$

В результате имеем, что

$$\forall x \in X :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |S(x) - C| < 3\varepsilon.$$

Пришли к требуемому соотношению $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = C$. Теорема доказана.

Теорема (об интегральном переходе для рядов). *Пусть функции* $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, *и ряд* $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда функция* $S(x)$ *будет интегрируемой на* $[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)\, dx.$$

Доказательство. 1) Покажем сначала, что при выполнении условий теоремы функция $S(x)$ будет интегрируемой на $[a, b]$. Снова обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Из равномерной сходимости ряда следует, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall n \geq N\ \Rightarrow\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Отсюда находим, что

$$S_N(x) - \varepsilon < S(x) < S_N(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на p произвольных частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b.$$

Положим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,p-1} \Delta x_i$,

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} S(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} S(x),$$

$$m_i^{(N)} = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} S_N(x), \quad M_i^{(N)} = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} S_N(x), \quad i = 0, \ldots, p-1.$$

Тогда получаем
$$(M_i - m_i) \leq (M_i^{(N)} - m_i^{(N)}) + 2\varepsilon.$$
Следовательно,
$$0 \leq \sum_{i=0}^{p-1}(M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{p-1}(M_i^{(N)} - m_i^{(N)})\Delta x_i + 2\varepsilon(b-a).$$
Учитывая, что функция $S_N(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ (как конечная сумма интегрируемых функций), имеем
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{p-1}(M_i^{(N)} - m_i^{(N)})\Delta x_i = 0.$$
Но тогда, в силу выведенных соотношений, получим
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{p-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = 0.$$
Значит, функция $S(x)$ будет интегрируемой на отрезке $[a,b]$ по критерию интегрируемости.

2) Докажем теперь справедливость интегрального перехода. Имеем
$$\left|\int_a^b S(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^b \left(S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)\,dx\right| = \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx \leq \varepsilon(b-a), \quad \forall n \geq N.$$
Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий предыдущей теоремы будет также верно соотношение:
$$\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^x u_k(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b],$$
причем нетрудно доказать, что функциональный ряд, стоящий в правой части выписанного соотношения, будет сходиться также равномерно на отрезке $[a,b]$ (т.е. если функциональный ряд сходится равномерно, то ряд из первообразных также будет сходиться равномерно на рассматриваемом множестве).

Теорема (о дифференциальном переходе для рядов). *Пусть функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c \in [a,b]$, а ряд $\sigma(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда ряд $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ будет равномерно сходиться на $[a,b]$, причем*
$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x).$$

Доказательство. Согласно теореме об интегральном переходе, проинтегрируем ряд $\sigma(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k'(x)$ по промежутку $[c, x]$ $(x \in [a, b])$. Полученный ряд

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \int_c^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(t)\right)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_c^x u_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k(x) - u_k(c))$$

будет равномерно сходиться на $[a, b]$ (см. замечание к предыдущей теореме). Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k(x) - u_k(c)) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(c)$$

также будет равномерно сходиться на $[a, b]$. Отсюда имеем

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(c).$$

Дифференцируя данное соотношение и применяя теорему Барроу, придем к требуемому:

$$\sigma(x) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\right)' - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(c)\right)' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\right)' = S'(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что из равномерной сходимости на заданном множестве ряда $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ сходимость (даже обычная) ряда $\sigma(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k'(x)$ на этом множестве может и не следовать.

Пример. Ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

сходится на любом отрезке $[a, b]$, причем если данный отрезок не содержит точек вида $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, то сходимость будет равномерной (это следует из признака равномерной сходимости Дирихле). Однако, почленное дифференцирование здесь недопустимо, поскольку получающийся ряд из производных:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kx)$$

расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

Пример. Пусть требуется найти сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}.$$

Применяя приведенные выше теоремы, получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to 1-0} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3k+1} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k t^{3k}\, dt = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{3k} \right) dt = \lim_{x\to 1-0} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

ГЛАВА VIII ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§ 2. Арифметические свойства функциональных рядов и последовательностей (продолжение)

Ранее были сформулированы арифметические свойства функциональных рядов. Однако, как это уже отмечалось, теория последовательностей идентична теории рядов. Поэтому все аналогичные арифметические свойства можно сформулировать и для функциональных последовательностей.

Теорема (о непрерывности предела последовательности). *Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на множестве X, и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to +\infty$ на X. Тогда функция $f(x)$ будет непрерывной на множестве X.*

Пример. Последовательность непрерывных функций:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \in (-\infty, -1/n), \\ nx & \text{при} \quad x \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{при} \quad x \in (1/n, +\infty), \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится при $n \to +\infty$ к разрывной функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

Проблема здесь в том, что сходимость $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to +\infty$ будет неравномерной на множестве $(-\infty, +\infty)$. Поэтому приведенная теорема не работает.

Теорема (о предельном переходе для последовательностей). *Пусть x_0 — предельная точка множества X, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на множестве X при $n \to +\infty$. Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Теорема (об интегральном переходе для последовательностей). *Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$ при $n \to +\infty$. Тогда*

$$\int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Теорема (о дифференциальном переходе для последовательностей). *Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$ при $n \to +\infty$, а последовательность $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$ при $n \to +\infty$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ будет равномерно сходиться на $[a, b]$ при $n \to +\infty$, причем*

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

§3. Степенные ряды

Рассмотрим конкретный пример функционального ряда, наиболее часто используемый в различных практических задачах.

Функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(y-y_0)^k = a_0 + a_1(y-y_0) + a_2(y-y_0)^2 + \ldots \tag{1}$$

называется степенным рядом. Здесь $y_0, a_0, a_1, \ldots$ — заданные постоянные, y — переменная.

Сделаем замену переменной $x = y - y_0$. Тогда ряд (1) примет вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. \tag{2}$$

Далее без потери общности будем рассматривать ряд (2).

1. Исследование сходимости степенного ряда.

Теорема (Абель). *1) Если ряд (2) сходится в точке $\bar{x}$, то он будет сходиться и в любой точке x, такой что $|x| < |\bar{x}|$.*

2) Если ряд (2) расходится в точке $\bar{x}$, то он будет расходиться и в любой точке x, такой что $|x| > |\bar{x}|$.

Доказательство. 1) Пусть ряд (2) сходится в точке $\bar{x}$. Тогда $a_k\bar{x}^k \to 0$ при $k \to +\infty$ (необходимое условие сходимости ряда). Значит, последовательность $\{a_k\bar{x}^k\}$ — ограничена, т.е. найдется $M \geq 0$, такое что $|a_k\bar{x}^k| \leq M$ при $k = 0, 1, \ldots$.

Выберем произвольное x, $|x| < |\bar{x}|$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k\bar{x}^k| \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^k \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^k. \tag{3}$$

Ряд в правой части неравенства (3) сходится (геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1), а значит, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ будет сходиться, причем абсолютно, по первому признаку сравнения рядов.

2) Пусть ряд (2) расходится в точке $\bar{x}$. Выберем произвольное x, $|x| > |\bar{x}|$. Предположим (от противного), что ряд (2) сходится в точке x. Но тогда по уже доказанной первой части теоремы ряд (2) должен сходиться и в точке $\bar{x}$. Получаем противоречие. Следовательно, ряд (2) расходится в точке x. Теорема доказана.

Следствие. *Существует такое R, $0 \leq R \leq +\infty$, что ряд (2) абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.*

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда (2). Если $R = 0$, то ряд (2) будет сходиться только при $x = 0$, а в остальных точках — расходиться. Если $R = +\infty$, то ряд (2) будет абсолютно сходиться на всей вещественной оси. Если $0 < R < +\infty$, то областью сходимости, причем абсолютной, ряда (2) будет являться интервал $(-R, R)$. Отметим, что в граничных точках $x = -R$ и $x = R$ ряд (2) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся, а сходимость там может быть как абсолютная, так и условная. Ситуация со сходимостью на левом конце ($x = -R$) интервала сходимости и на правом ($x = R$) — может быть разная, т.е. эти две точки надо дополнительно исследовать по отдельности.

Для нахождения радиуса сходимости ряда (2) можно использовать признаки сходимости Коши и Даламбера (см. предыдущую главу).

Применим признак Коши:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Предположим, что данный предел существует. Тогда если он меньше 1, то ряд (2) абсолютно сходится. Если он больше 1, то абсолютной сходимости не будет. Значит,

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{4}$$

Отметим, что если предела в формуле (4) не существует, то вместо него можно использовать верхний предел (см. признак Коши).

Аналогично, применяя признак Даламбера, получим

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}, \tag{5}$$

если этот предел существует.

Пример. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Здесь $a_k = \frac{1}{k!}$. По формуле (5) находим

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1}} = +\infty.$$

Значит, ряд абсолютно сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!\, x^k.$$

Здесь $a_k = k!$. По формуле (5) имеем

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{k!}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} (k+1)} = 0.$$

Значит, ряд сходится только при $x = 0$ и расходится при любом $x \neq 0$.

Пример. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}.$$

Здесь $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. По формуле (4) вычислим

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|(-1)^k/k|}} = 1.$$

Значит, ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Дополнительно исследуем поведение ряда на границе интервала сходимости. В точке $x = -1$ ряд принимает вид гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$; он расходится. В точке $x = 1$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$; этот ряд сходится неабсолютно по признаку Лейбница.

2. Ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные любого порядка в окрестности точки $x_0 = 0$. Тогда для любого натурального значения n будет справдлива формула Тейлора — Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_n(x), \tag{6}$$

где $R_n(x)$ — остаточный член, который можно, например, оценить с использованием форм Пеано, Лагранжа, Коши или интегральной формы.

Формальный переход к пределу при $n \to +\infty$ в формуле (6) приведет к разложению функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k. \tag{7}$$

Ряд (7) называется степенным рядом Тейлора. Это ряд вида (2). Здесь $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$. Если к функции $f(x)$ применить формулу Тейлора в окрестности какой-то другой точки $x_0 \neq 0$, то придем к степенному ряду более общего вида (1). Однако, как уже было отмечено, заменой переменных все можно свести к рассматриваемому частному случаю.

Функция $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$ представляет собой частичную сумму ряда (7), а $R_n(x)$ его остаток.

Для того чтобы переход от конечной фурмулы Тейлора (6) к степенному ряду Тейлора (7) был корректен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) ряд (7) должен сходиться в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$;

2) в указанной окрестности должно выполняться условие $R_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Лемма. *Пусть существует $H > 0$ такое, что функциональная последовательность $\{f^{(k)}(x)\}$ равномерно ограничена на промежутке $[-H, H]$. Тогда разложение (7) будет справедливо для любого $x \in [-H, H]$.*

Доказательство. Из равномерной ограниченности последовательности $\{f^{(k)}(x)\}$ на промежутке $[-H, H]$ вытекает существование постоянной $L \geq 0$ такой, что

$$|f^{(k)}(x)| \leq L$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$, $x \in [-H, H]$.

Сходимость ряда (7) на промежутке $[-H, H]$ следует из первого признака сравнения:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \right| \leq L \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}.$$

Сходимость последнего ряда может быть установлена по признаку Даламбера.

Выпишем остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа. Получим

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\theta x)|\,|x|^{n+1} \leq \frac{LH^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Здесь $\theta \in (0, 1)$.

Значит, указанные выше условия 1), 2) выполнены. Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим следующие разложения простейших функций в ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots, \tag{8}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots, \tag{9}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots. \tag{10}$$

К данным разложениям можно применить Лемму, причем в качестве H можно взять любую положительную постоянную. Значит, формулы (8)–(10) справедливы для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если требования Леммы не выполнены, то проверять условия 1), 2) надо непосредственно для исследуемой функции.

Пример. Разложим в степенной ряд логарифмическую функцию:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \ldots. \tag{11}$$

Здесь $x > -1$. Применяя формулу Даламбера (5), находим, что радиус сходимости степенного ряда (11) равен 1. Значит, этот ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$. Исследуем границы интервала сходимости. Точка $x = -1$ не входит в область определения функции, да и получаемый в этой точке степенной ряд — это расходящийся гармонический ряд. В точке $x = 1$ ряд сходится неабсолютно по признаку Лейбница.

Выпишем остаточный член формулы Тейлора для рассматриваемой логарифмической функции в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Если $x \in [0, 1]$, то $|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Выпишем теперь остаточный член формулы Тейлора в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}(1-\tilde{\theta})^n}{(1+\tilde{\theta}x)^{n+1}},$$

где $\tilde{\theta} \in (0, 1)$. Если $x \in (-1, 0)$, то

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\left(\frac{1-\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}x}\right)^n.$$

Поскольку $1 + \tilde{\theta}x > 1 - \tilde{\theta}$, то $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to +\infty$.

Таким образом, формула (11) справедлива (условия 1) и 2) выполнены) для всех $x \in (-1, 1]$.

Пример. Рассмотрим теперь степенную функцию

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}x^n + \ldots. \tag{12}$$

Здесь мы полагали, что m не является неотрицательной целой величиной (иначе, согласно биному Ньютона, разложение выродится в конечную сумму). Степенной ряд (12) называется биномиальным рядом. Его радиус сходимости равен 1. В точке $x = -1$ ряд абсолютно сходится, если $m > 0$, и расходится, если $m < 0$. В точке $x = 1$ ряд абсолютно сходится, если $m > 0$, условно сходится, если $0 > m > -1$, и расходится, если $m \leq -1$. Выписывая остаточный член формулы Тейлора для рассматриваемой функции в форме Лагранжа и Коши, нетрудно доказать, что во всех случаях, когда ряд (12) сходится, имеет место условие $R_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$.

В рассмотренных примерах (8)–(12) во всех случаях, когда выполнялось условие 1) (сходимость ряда), выполнялось и условие 2) (стремление остаточного члена формулы Тейлора к нулю). В общем случае этого может и не быть (ряд может сходиться, но не к той функции, к которой надо). Поэтому условие 2) нуждается в отдельной проверке.

Пример. Разложим в степенной ряд функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Непосредственно по определению можно убедиться, что данная функция дифференцируема бесконечное число раз в точке 0, и $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда ряд Тейлора будет состоять только из нулевых слагаемых: $0 + 0x + 0x^2 + \ldots$. Такой ряд сходится в любой точке x, но при $x \neq 0$ его сумма не совпадает с $f(x)$ (условие 2) не выполнено).

3. Исследование равномерной сходимости степенного ряда.

Степенной ряд — это функциональный ряд, а значит, можно поставить вопрос о его равномерной сходимости в некоторой области.

Теорема. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (2). Тогда при любом $r \in (0, R)$ ряд (2) будет равномерно сходиться на промежутке $[-r, r]$.*

Доказательство. Имеем $|a_k x^k| \leq |a_k| r^k$ при всех $x \in [-r, r]$. Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k$ сходится (поскольку внутри интервала сходимости ряд (2) сходится абсолютно). Тогда ряд ряд (2) будет равномерно сходиться на промежутке $[-r, r]$ по признаку Вейерштрасса. Теорема доказана.

Данная теорема утверждает, что если от границы интервала сходимости отступить, хоть на немного, то в оставшейся части интервала сходимость степенного ряда обязательно будет равномерной.

Обозначим сумму ряда (2) через $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Следствие. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (2). Тогда функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-R, R)$.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in (-R, R)$. Тогда можно найти такое r, что $-R < -r \leq x \leq r < R$. Согласно предыдущей теореме, ряд (2) равномерно сходится на промежутке $[-r, r]$. Слагаемые этого ряда непрерывны на этом промежутке. Тогда по теореме о непрерывности суммы функционального ряда (см. ранее) получаем, что $f(x)$ будет непрерывной в выбранной точке x, а значит, и на всем интервале $(-R, R)$. Следствие доказано.

Отметим, что на всем интервале $(-R, R)$ (т.е. если отступ от границы не делать) сходимость ряда (2) может оказаться неравномерной, и функция $f(x)$ в граничных точках $x = -R$ и $x = R$ может терпеть разрыв. Рассмотрим при каких условиях это будет так. Ситуацию в каждой из граничных точек $x = -R$ и $x = R$ надо исследовать по отдельности. Будем для определенности считать, что $x \in [0, R)$ (т.е. рассмотрим ситуацию с правой граничной точкой, с левой — все аналогично).

Теорема. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (2). Тогда для того чтобы ряд (2) сходился равномерно на интервале $[0, R)$ необходимо и достаточно, чтобы этот ряд сходился (хотя бы условно) в точке $x = R$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряд (2) сходится равномерно на интервале $[0, R)$. Тогда по теореме о предельном переходе для функциональных рядов (см. ранее) получаем после предельного перехода

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$$

сходящийся ряд.

Достаточность. Пусть ряд (2) сходится в точке $x = R$, хотя бы условно. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

будет сходиться равномерно на интервале $[0, R)$ по признаку Абеля. В самом деле, ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k R^k$ сходится (причем это числовой ряд, поэтому сходимость автоматически получается равномерной относительно x), а последовательность $(x/R)^k$ монотонно убывает по k при любом $x \in [0, R)$, и она равномерно ограничена (константой 1) на интервале $[0, R)$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (2), и ряд сходится в точке $x = R$. Тогда функция $f(x)$ будет непрерывна слева в этой точке.*

Теорема. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (2). Тогда внутри интервала $(-R, R)$ этот ряд допускает почленное интегрирование и дифференцирование, т.е.*

$$\int_0^x f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \tag{13}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, k\, x^{k-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Выберем произвольное $x \in (-R, R)$. Тогда можно найти такое r, что $-R < -r \le x \le r < R$. Ряд (2) равномерно сходится на промежутке $[-r, r]$. Слагаемые этого ряда интегрируемы и дифференцируемы на этом промежутке. Ряд (14) также равномерно сходится на промежутке $[-r, r]$. Тогда получаем требуемое по теоремам об интегральном и дифференциальном переходах для функциональных рядов (см. ранее). Теорема доказана.

Заметим, что радиусы сходимости рядов (13) и (14) также равны R (это легко проверить по формулам (4) или (5)). Т.е. степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости любое число раз. При этом радиус сходимости получаемых рядов меняться не будет.

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, k\, x^{k-1}, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k\, k(k-1)\, x^{k-2}, \quad \ldots .$$

Отсюда имеем
$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots,$$
т.е. $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots$. Значит,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k,$$
а это ряд Тейлора — Маклорена. Таким образом, доказали, что если функция $f(x)$ представима в виде степенного ряда, то это может быть только ряд Тейлора и никакой другой. Если имеет место разложение функции в степенной ряд, то оно определяется однозначно.

Определение. *Если функция представима в виде степенного ряда Тейлора в некоторой точке, то она называется аналитической функцией в данной точке.*

Функция $f(x) = 1/x$ в точке 0 не определена и не дифференцируема. Значит разложение ее в ряд Тейлора невозможно в этой точке, т.е. она не аналитическая там. Во всех остальных точках она аналитическая.

4. Примеры использования степенных рядов.

Степенные ряды активно используются в самых разных областях математики. Рассмотрим некоторые самые простейшие примеры.

Пример. Найти сумму ряда
$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots.$$
Радиус сходимости этого степенного ряда равен 1 (см. формулы Коши или Даламбера). Проинтегрируем ряд на промежутке $[0, x]$, где $0 < x < 1$. Получим
$$\int_0^x S(x)\,dx = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$
по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии. Дифференцируя это выражение, найдем
$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$
Это формула верна при $|x| < 1$. На границе интервала сходимости в точках $x = -1$ и $x = 1$ заданный ряд расходится.

Пример. Найти сумму ряда
$$S(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots.$$
Радиус сходимости этого степенного ряда равен 1 (см. формулы Коши или Даламбера). Продифференцируем этот ряд при $|x| < 1$. Получим
$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$
Проинтегрируем это выражение на промежутке $[0, 1]$:
$$S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x).$$

Поскольку $S(0) = 0$, то
$$S(x) = -\ln(1-x).$$
Эта формула остается верной и на левой границе $x = -1$ интервала сходимости, откуда, в частности, имеем
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2.$$

Пример. Вычислить приближенно определенный интеграл
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
Интеграл неберущийся. Разложим подинтегральную функцию в степенной ряд. С учетом формулы (9) имеем
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots\right) dx =$$
$$= \left(x - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{5\cdot 5!}x^5 - \ldots\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \ldots \approx 0.946.$$
Поскольку радиус сходимости ряда (9) равен $+\infty$, все операции законны.

Пример. Вычислить интеграл с переменным верхним пределом
$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\, dx.$$
Это берущийся интеграл:
$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(x+1).$$
Используя биномиальный ряд (12), получим
$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\, dx = \int_0^x \left(1 - x + x^2 - \ldots\right) dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots.$$
С учетом области сходимости используемого степенного ряда эти выкладки справедливы только для $x \in (-1, 1]$.

Пример. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению
$$y'' + xy' + y = 0$$
и начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Будем функцию искать в виде степенного ряда
$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$
Подставим этот ряд в уравнение, получим тождество
$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_k\, k(k-1)\, x^{k-2} + x\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, k\, x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k k + a_k\right) x^k \equiv 0.$$

Приравнивая все коэффициенты полученного степенного ряда к нулю, получим систему для нахождения значений a_k:

$$2a_2 + a_0 = 0,$$

$$6a_3 + 2a_1 = 0,$$

$$12a_4 + 3a_2 = 0,$$

$$20a_5 + 4a_3 = 0,$$

$$\ldots .$$

Из начальных условий: $y(0) = a_0 = 0$, $y'(0) = a_1 = 1$. Тогда $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{15}$, $\ldots$. Значит,

$$y(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \ldots .$$

ГЛАВА VIII ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§3. Степенные ряды (продолжение)

Ряды, в том числе степенные, широко применяют для приближенных вычислений. Пусть некоторая величина представима в виде сходящегося ряда. Тогда ее можно аппроксимировать частичной суммой этого ряда. Но сходимость ряда может оказаться очень медленной, и тогда для хорошей аппроксимации приходится использовать очень большое количество слагаемых в частичной сумме. В таких случаях пытаются как-то преобразовать ряд, так чтобы получился новый ряд, сходящийся к той же величине, но с большей скоростью. Имеются различные специальные типы таких преобразований (см. Фихтенгольц Г.М.).

Пример. Пусть требуется приближенно вычислить число π. Воспользуемся степенным рядом

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

сходящимся при $x \in [-1, 1]$. Полагая $x = 1$, получим

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Тогда

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Чтобы с помощью этой формулы вычислить число π с точностью до 0.00001 потребуется задействовать около 50000 слагаемых полученного ряда. Это плохо.

Полагая $x = 1/\sqrt{3}$, получим уже более быстро сходящийся ряд:

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^3} + \ldots\right).$$

Можно еще улучшить результат. Учитывая тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

выберем в качестве величин x и y правильные дроби, удовлетворяющие соотношению $\frac{x+y}{1-xy} = 1$. Тогда получим

$$\pi = 4\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y\right) = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right) + \left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots\right).$$

Возьмем, например, $x = 1/2$, $y = 1/3$. В этом случае

$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \ldots\right) + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^2} + \ldots\right).$$

Можно вывести еще более точную формулу. Положим $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119} \approx 1$. Отсюда $4\alpha \approx \frac{\pi}{4}$. Пусть $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$. Получаем $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$. Значит, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3} + \ldots\right).$$

Выписывая 6 слагаемых в первой скобке данной формулы и 2 слагаемых — во второй, найдем число π с точностью до 0.0000001.

§4. Комплексные ряды

Ранее рассматривалась теория вещественных рядов. Рассмотрим теперь комплексные.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \tag{1}$$

называется комплексным рядом. Конечную сумму

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

как и ранее, назовем частичной суммой ряда.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_n,$$

то ряд (1) называется сходящимся, а комплексное число C называется суммой ряда.

Будем писать $C = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$.

Таким образом, понятие сходимости комплексного ряда вводится также, как и для вещественного ряда.

Пусть $c_k = a_k + ib_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Здесь $a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$, i — мнимая единица. Рассмотрим вещественные ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k. \tag{2}$$

Положим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Если существуют конечные пределы

$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n, \quad B = \lim_{n\to+\infty} B_n,$$

то ряды (2) сходятся, а вещественные числа A, B будут их суммами, соответственно. Будем писать $A = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, $B = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Теорема. *Комплексный ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба вещественных ряда (2), и при этом $C = A + iB$.*

Доказательство следует из теории комплексных последовательностей:

$$C = \lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty}(A_n + iB_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n + i\lim_{n\to+\infty} B_n = A + iB.$$

Согласно приведенной теореме, исследование сходимости комплексного ряда сводится к исследованию сходимости вещественных рядов.

Определение. *Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|. \tag{3}$$

Теорема. *Если сходится ряд (3), то будет сходиться и ряд (1) (из абсолютной сходимости следует обычная сходимость).*

Доказательство. Поскольку $|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, то

$$|a_k| \le |c_k|, \quad |b_k| \le |c_k|.$$

Пусть ряд (3) сходится. Тогда по первому признаку сходимости будут сходиться и ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |b_k|$. Для вещественных рядов было ранее уже доказано, что из абсолютной сходимости следует обычная сходимость. Значит, ряды (2) сходятся, но тогда будет сходиться и ряд (1). Теорема доказана.

Отметим, что ряд (3) — это вещественный ряд, т.е. для анализа абсолютной сходимости комплексного ряда можно пользоваться всеми признаками сходимости знакопостоянных вещественных рядов. Обратная теорема, вообще говоря, не верна, т.е. из обычной сходимости комплексного ряда может не следовать его абсолютная сходимость. В этом случае сходимость называется неабсолютной или условной.

Аналогично можно ввести понятие функционального комплексного ряда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z).$$

Здесь $u_k(z)$ — это функции комплексной переменной z, $k = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим, например, степенной комплексный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Здесь z_0, c_k — заданные комплексные постоянные, z — комплексная переменная. Как и в предыдущем параграфе, без потери общности можно исследовать только случай, когда $z_0 = 0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k. \tag{4}$$

Для ряда (4) справедлива та же теорема Абеля, что и для вещественного степенного ряда. Таким образом, существует вещественное число $0 \le R \le +\infty$, называемое радиусом сходимости, такое что ряд (4) сходится абсолютно при

$$|z| < R \tag{5}$$

и расходится при $|z| > R$. Граница

$$|z| = R \tag{6}$$

нуждается в отдельном исследовании. Отметим, что в комплексном случае область (5) представляет собой круг, а (6) — окружность. Ситуация со сходимостью на границе (6) может быть самая разная (на части окружности ряд может абсолютно сходиться, на другой части — неабсолютно сходиться, на третьей части — расходиться).

Для нахождения радиуса сходимости R можно использовать те же формулы Коши и Даламбера, что и для вещественных степенных рядов.

Определим, например, экспоненту от комплексной переменной как сумму степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots . \tag{7}$$

Радиус сходимости данного степенного ряда равен $+\infty$, т.е. формула (7) определена для любого комплексного z.

Пользуясь правилом умножения рядов (теорема Мертенса), нетрудно доказать, что для любых комплексных z_1 и z_2 верно: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Пусть $z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Тогда

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \left(1 + (iy) + \frac{1}{2!}(yi)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \ldots\right).$$

Поскольку рассматриваемый ряд сходится абсолютно, в нем можно менять порядок слагаемых, как угодно. Сгруппируем слагаемые, относящие к вещественной и мнимой части:

$$e^{x+iy} = e^x \left((1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \ldots) + i(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \ldots)\right) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Получили формулу Эйлера.

Аналогично имеем

$$e^{x-iy} = e^x(\cos y - i\sin y).$$

Отсюда (выбирая $x = 0$) получим

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}).$$

Иногда с комплексной экспонентой вычисления производить легче, чем с вещественными синусом и косинусом.

Из найденных соотношений можно вывести многие известные тригонометрические тождества. Например, для вещественных чисел a и b получим

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b).$$

С другой стороны:

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b).$$

Значит,

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a.$$

Отметим, что комплексная экспонента, в отличие от вещественной, не является взаимно однозначной функцией. Например,

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = 1,$$

т.е. разным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции. Поэтому комплексный логарифм определяется неоднозначно.

Пусть w — ненулевое комплексное число, и $w = e^z$. Тогда комплексное число z называется натуральным логарифмом числа w ($z = \ln w$).

Предположим, что $z = x + iy$, $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Здесь $r = |w|$, $\theta = \operatorname{Arg} w$. Тогда из формулы Эйлера следует

$$r = e^x, \quad \cos\theta = \cos y, \quad \sin\theta = \sin y.$$

Таким образом,

$$x = \ln r$$

— это вещественный логарифм, он определяется однозначно, и

$$y = \theta + 2\pi k,$$

где k может принимать любое целое значение, т.е. значение y определяется неоднозначно.

Получаем

$$\ln w = \ln|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2\pi k).$$

Подробнее см. курс ТФКП.

§5. Аппроксимация непрерывных функций степенными полиномами

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна там. Покажем, что ее на этом отрезке можно сколь угодно точно аппроскимировать (приблизить) степенным полиномом. Делая замену переменной $x = a + (b-a)y$, получим непрерывную функцию $\tilde{f}(y) = f(a + (b-a)y)$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Далее, не умаляя общности, будем считать, что такая замена переменной уже сделана, и будем рассматривать непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Сформулируем один вспомогательный результат.

Лемма. *Для любого $x \in [0, 1]$ и любого натурального n справедливо следующее неравенство Бернулли:*

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(\frac{m}{n} - x\right)^2 x^m (1-x)^{n-m} \le \frac{1}{4n}.$$

Доказательство. Для любых чисел p и q справедливо тождество (бином Ньютона):

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Зафиксируем q и продифференцируем тождество по p:

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m p^{m-1} q^{n-m}.$$

Домножим его на p:

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

Тождество (2) снова продифференцируем по p и после этого домножим на p. Получим:

$$np(p+q)^{n-2}(pn+q) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m^2 p^m q^{n-m}. \tag{3}$$

Положим $p = x$, $q = 1 - x$. Тогда тождества (1)–(3) примут вид:

$$1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \tag{1'}$$

$$nx = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m x^m (1-x)^{n-m}, \tag{2'}$$

$$nx(nx + 1 - x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m^2 x^m (1-x)^{n-m}. \tag{3'}$$

Тождество (1') домножим на n^2x^2, тождество (2') домножим на $(-2nx)$, и сложим все это вместе с тождеством (3'). Получим

$$nx - nx^2 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (nx - m)^2 x^m (1-x)^{n-m}.$$

Поскольку $x - x^2 \le 1/4$ при $x \in [0, 1]$, то

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m (nx - m)^2 x^m (1-x)^{n-m} \le \frac{n}{4},$$

откуда вытекает

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(\frac{m}{n} - x\right)^2 x^m (1-x)^{n-m} \le \frac{1}{4n}.$$

Лемма доказана.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить степенной полином $P_n(x)$, такой что $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ при $x \in [0, 1]$.*

Доказательство. Будем строить многочлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m} \tag{4}$$

(многочлен Бернштейна). Покажем, что функциональная последовательность (4) сходится при $n \to +\infty$ к функции $f(x)$ равномерно на промежутке $[0, 1]$. Тем самым, теорема будет доказана (при больших значениях n полином (4) будет аппроксимировать функцию $f(x)$ с заданной точностью ε на всем промежутке $[0, 1]$).

Функция $f(x)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на промежутке $[0, 1]$. Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, что для любых $x_1, x_2 \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Кроме того, по теореме Вейерштрасса (о непрерывных функциях) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[0, 1]$, т.е. существует $M > 0$, такое что $|f(x)| \le M$ при $x \in [0, 1]$.

Имеем

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{m=0}^{n} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m} - f(x) \right| = (\text{см. } (1')) =$$

$$= \left| \sum_{m=0}^{n} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m} - f(x) \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| = \sum_{|\frac{m}{n}-x|<\delta} (\ldots) + \sum_{|\frac{m}{n}-x|\ge\delta} (\ldots).$$

Оценим первую сумму

$$\sum_{|\frac{m}{n}-x|<\delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \sum_{|\frac{m}{n}-x|<\delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = (\text{см. } (1')) = \varepsilon.$$

Оценим вторую сумму

$$\sum_{|\frac{m}{n}-x|\ge\delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| \le 2M \sum_{|\frac{m}{n}-x|\ge\delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \le$$

$$\le 2M \sum_{|\frac{m}{n}-x|\ge\delta} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \frac{\left(\frac{m}{n}-x\right)^2}{\delta^2} \le$$

$$\le \frac{2M}{\delta^2} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \left(\frac{m}{n}-x\right)^2 \le$$

$$\le (\text{см. неравенство Бернулли}) \le \frac{M}{2\,\delta^2 n}.$$

Отсюда можно найти такое $N > 0$, что для любого $n \ge N$ получим $\frac{M}{2\,\delta^2 n} < \varepsilon$.

В итоге: для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N > 0$, такой что для любого $n \ge N$ выполнено неравенство $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$ при всех $x \in [0,1]$. Получили требуемое, теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in [0,1]$. Выберем $n = 3$, т.е. будем аппроксимировать функцию полиномом третьей степени. Тогда

$$P_n(x) = 1\,\sin(0)(1-x)^3 + 3\,\sin(1/3)x(1-x)^2 + 3\,\sin(2/3)x^2(1-x) + 1\,\sin(1)x^3$$

— полином Бернштейна.

В доказательстве теоремы Вейерштрасса предлагается аппроксимировать непрерывные функции на отрезке многочленами Бернштейна. Отметим, что это всего лишь один из возможных способов аппроксимации. Можно использовать и другие подходы. Например, если отрезок достаточно мал, и функция дифференцируема достаточное число раз в окрестности некоторой точки из этого отрезка, то для аппроксимации можно попробовать использовать полином Тейлора (получаемый из формулы Тейлора отбрасыванием остаточного члена). Однако, хорошее качество такой аппрокимации будет обеспечиваться только в малой окрестности выбранной точки, и оно будет ухудшаться по мере удаления от этой точки. Кроме того, для построения многочленов Бернштейна, в отличие от многочленов Тейлора, достаточно только непрерывности функции (дифференцируемость не нужна). Для аппроксимации можно использовать также интерполяционные или регрессионные полиномы.

Однако, здесь хорошее качество аппроксимации гарантируется лишь вблизи узлов выбранной сетки. И т.д.

Можно поставить задачу: при заданном значении степени n построить полином этой степени, наилучшим образом аппроксимирующий заданную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для этого решают оптимизационную задачу

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)| \to \min_{a_0, \ldots, a_n}$$

(минимизируют невязку засчет подбора коэффициентов полинома). Для некоторых простейших классов функций такая оптимизационная задача решена.

ГЛАВА VIII ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§6. Ряды Фурье

Рассмотрим еще один вид функциональных рядов, имеющий широкое практическое применение.

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном отрезке $[a,b]$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется суммируемой с квадратом на отрезке $[a,b]$, если интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ определен и принимает конечное значение.*

Обозначим через L^2 множество всех функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$.

Отметим некоторые свойства пространства L^2:

1) если $f(x) \in L^2$, то функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ (интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определен и принимает конечное значение);

2) если $f_1(x), f_2(x) \in L^2$, то функция $f_1(x)f_2(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ (интеграл $\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx$ определен и принимает конечное значение);

3) если $f_1(x), f_2(x) \in L^2$, то $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) \in L^2$ при любых значениях констант c_1 и c_2.

Далее будем предполагать, что все используемые функции принадлежат пространству L^2. Это будет гарантировать существование и конечность всех используемых в вычислениях интегралов.

Определение. *Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ называется ортогональной на отрезке $[a,b]$, если*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \textit{при } i \neq j, \\ \lambda_i^2, & \textit{при } i = j. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — некоторые положительные числа. Если все эти числа равны 1, то система функций называется ортонормальной.

Отметим, что любую ортогональную систему функций можно нормировать. В самом деле, пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=0,1,\ldots}$ — ортогональная система функций на отрезке $[a,b]$. Тогда система функций $\left\{\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right\}_{i=0,1,\ldots}$ будет ортонормальной на этом отрезке.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in L^2$. Предположим, что ее можно представить в виде:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots. \tag{1}$$

Если система ортогональных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0,1,\ldots}$ бесконечна, то тогда (1) — это функциональный ряд. Предположим, что он сходится на отрезке $[a,b]$. Возьмем некоторое значение индекса i, домножим ряд (1) на функцию $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$ (при этом предполагаем, что ряд допускает почленное интегрирование). Получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = c_0\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_i(x)\,dx + c_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_i(x)\,dx + \ldots.$$

В силу ортогональности, в правой части данного равенства останется только i-ое слагаемое (остальные равны 0). Значит,

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = c_i \int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx = c_i\lambda_i^2.$$

Тогда

$$c_i = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx} = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Ряд (1) называется рядом Фурье для функции $f(x)$, а коэффициенты (2) называются коэффициентами Фурье.

Отметим, что пока эти формулы носят формальный характер. Вопрос о сходимости ряда Фурье и о допустимости его почленного интегрирования будет исследован далее.

Рассмотрим теперь конкретный пример ортогональной системы функций, наиболее часто используемой в различных задачах.

Пусть $[a, b] = [-\pi, \pi]$,

$$\begin{gathered}
\varphi_0(x) = 1,\\
\varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_2(x) = \cos x,\\
\varphi_3(x) = \sin 2x, \quad \varphi_4(x) = \cos 2x,\\
\ldots\\
\varphi_{2k-1}(x) = \sin kx, \quad \varphi_{2k}(x) = \cos kx,\\
\ldots .
\end{gathered}$$

Нетрудно проверить, что:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \sin nx\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m,\, n = 0, 1, \ldots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \quad m,\, n = 0, 1, \ldots, \\ 2\pi & \text{при } m = n = 0, \\ \pi & \text{при } m = n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \quad m,\, n = 1, 2, \ldots, \\ \pi & \text{при } m = n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая тригонометрическая система функций является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нормированной эта система не является. Здесь $\lambda_0^2 = 2\pi$, $\lambda_i^2 = \pi$, $i = 1, 2, \ldots$.

Формулы (1), (2) в данном случае принимают вид (формулы Эйлера — Фурье):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
a_k &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \\
b_k &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots .
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь для удобства коэффициенты Фурье перед косинусами и синусами обозначены разными буквами ($c_0 = a_0/2$, $c_1 = b_1$, $c_2 = a_1$, и т.д.).

Ряд (3) будем называть тригонометрическим (или классическим) рядом Фурье.

Пример. Пусть $f(x) = \cos^2 x$. Разложим эту функцию в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$. Для этого считаем коэффициенты Фурье по формулам (4). Имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, \cos kx \, dx = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 1/2 & \text{при } k = 2, \\ 0 & \text{при } k = 1, 3, 4, \ldots; \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, \sin kx \, dx = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots.$$

Значит,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{5}$$

Здесь ряд Фурье выродился в известное конечное выражение.

Пример. Рассмотрим теперь кусочно-постоянную функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in [-\pi, -\pi/2), \\ 1 & \text{при } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ -1 & \text{при } x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Получим

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2} & \text{при } k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\,\cos kx = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p-1)}\cos(2p-1)x. \tag{6}$$

Отметим, что ряд (6) сходится на промежутке $[-\pi, \pi]$, в том числе и в точках $x_1 = -\pi/2$, $x_2 = \pi/2$, которые являются для функции $f(x)$ точками разрыва 1 рода. В этих точках ряд сходится к средним значениям $(f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0))/2 = 0$ и $(f(x_2 - 0) + f(x_2 + 0))/2 = 0$, соответственно.

Более того, классический ряд Фурье является 2π-периодическим. Поэтому формула (6) будет справедлива не только для промежутка $[-\pi, \pi]$, но и для всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$, если функцию $f(x)$ продолжить 2π-периодическим образом на эту ось. Аналогично и формула (5) верна для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом, под рядом Фурье можно понимать как разложение произвольной функции на конечном промежутке, так и как разложение периодической функции на всей числовой оси.

В некоторых случаях вычисление коэффициентов Фурье можно упростить.

Теорема. *1) Если функция $f(x)$ четная, то*

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

2) Если функция $f(x)$ нечетная, то

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство для четной функции (для нечетной все аналогично). Имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right).$$

В первом интеграле в скобках сделаем замену переменных $x := -x$. Тогда с учетом четности функции получим

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{0} f(-x) \cos(-kx) \, d(-x) + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{\pi}^{0} f(x) \cos(kx) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Аналогично

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{0} f(-x) \sin(-kx) \, d(-x) + \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{0} f(x) \sin(kx) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) = 0.$$

Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана при $x \in [-l, l]$ ($l = \mathrm{const} > 0$). Сделаем замену переменной $y = \frac{\pi x}{l}$. Тогда $y \in [-\pi, \pi]$. Обозначим

$$f(x) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \tilde{f}(y).$$

Применим формулы (3), (4) к функции $\tilde{f}(y)$. Тогда

$$\tilde{f}(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos ky + b_k \sin ky \right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos ky \, dy, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \sin ky \, dy, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\,\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\,\sin\frac{\pi kx}{l}\right),$$

где

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx,\quad k=0,1,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx,\quad k=1,2,\ldots.$$

Аналогично, засчет сдвига переменной, можно получить разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на любом промежутке $[a,b]$.

§7. Сходимость классического ряда Фурье

Как отмечалось в предыдущем параграфе, выписанные формулы для рядов Фурье, вообще говоря, нуждаются в обосновании. В данном параграфе исследуем вопрос сходимости классического ряда Фурье. Без потери общности будем считать, что функция $f(x)$ задана на промежутке $[-\pi,\pi]$ (является 2π-периодической). Тогда ряд Фурье для нее имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\,\cos kx+b_k\,\sin kx\right),\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}a_k&=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad k=0,1,\ldots,\\ b_k&=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad k=1,2,\ldots.\end{aligned}\tag{2}$$

Выберем $x_0\in[-\pi,\pi]$ и исследуем сходимость ряда (1) в точке x_0. Построим последовательность частичных сумм

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\,\cos kx_0+b_k\,\sin kx_0\right).\tag{3}$$

Подставим (2) в (3). Получим

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\,\cos kx_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\,\sin kx_0\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\,\cos kx_0+\sin kx\,\sin kx_0)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)dx.$$

Лемма 1. *Для любого вещественного α и любого натурального n справедливо тождество*

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(k+\frac{1}{2})\alpha-\sin(k-\frac{1}{2})\alpha\right)\right)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Лемма доказана.

Применяя лемму 1, получим

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_0)}{2\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx=(x-x_0=t)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}f(x_0+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Лемма 2. *Если $f(x)$ — 2π-периодическая функция, то для любого числа σ верно*

$$\int_{-\pi+\sigma}^{\pi+\sigma}f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt.$$

Согласно лемме 2, имеем

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x_0+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+\int_{0}^{\pi}f(x_0+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0}f(x_0-t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(-t)}{2\sin\frac{(-t)}{2}}\,d(-t)+\int_{0}^{\pi}f(x_0+t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (4)$$

Полученный интеграл называется интегралом Дирихле.

Лемма 3 (Риман). *Пусть функция $g(t)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{b}g(t)\sin pt\,dt=0,$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{b}g(t)\cos pt\,dt=0.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение (с синусом), для второго (с косинусом) все аналогично. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда функция $g(t)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. когда используемый интеграл — "собственный".

Для любых чисел α, β и $p \neq 0$ имеем

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\,dt\right| = \left|\frac{\cos\alpha p - \cos\beta p}{p}\right| \le \frac{2}{p}.$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Обозначим $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = (b-a)/n$, $i = 0,\ldots,n-1$. Тогда $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta t_i = (b-a)/n$ — ранг дробления. Положим

$$m_i = \inf_{[t_i,t_{i+1}]} g(t), \quad M_i = \sup_{[t_i,t_{i+1}]} g(t), \quad \omega_i = M_i - m_i, \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Получаем

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (g(t)-m_i)\sin pt\,dt + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} m_i\sin pt\,dt\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |g(t)-m_i|\,dt + \sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt\,dt\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i + \sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\frac{2}{p}.$$

Согласно критерию интегрируемости функций, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что если $\lambda < \delta$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i < \varepsilon.$$

Выберем n такое, что $(b-a)/n < \delta$. Найдем $\bar p$ так, чтобы имело место соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\frac{2}{\bar p} < \varepsilon.$$

В результате для заданного $\varepsilon > 0$ нашли $\bar p$ такое, что для всех $p \ge \bar p$ справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \le 2\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = 1.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \equiv 1$. Тогда $S_n(x_0) = 1$ при любых n и x_0. Из (4) следует требуемое. Лемма доказана.

Далее предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, либо терпит там разрыв 1 рода. Положим

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Число S_0 представляет собой среднее значение функции $f(x)$ в точке x_0. В частности, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $S_0 = f(x_0)$.

Найдем условия, при выполнении которых имеет место предельное соотношение

$$S_n(x_0) \to S_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

что будет означать сходимость ряда Фурье в заданной точке x_0 к среднему значению S_0.

Рассмотрим

$$|S_n(x_0) - S_0| = (\text{см. (4) и лемму 4}) =$$
$$= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0+t)+f(x_0-t)) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt - S_0 \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \right| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \varphi(t) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|.$$

Здесь

$$\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t) - 2S_0.$$

Выберем некоторое $h \in (0,\pi)$. Тогда

$$|S_n(x_0) - S_0| \le \frac{1}{\pi}\left|\int_0^h \varphi(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_h^\pi \varphi(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^h \frac{\varphi(t)}{t}\frac{t/2}{\sin(t/2)}\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_h^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\frac{t/2}{\sin(t/2)}\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt\right|. \qquad (5)$$

Заметим, что функция $\frac{t/2}{\sin(t/2)}$ интегрируема на промежутках $[0,h]$ и $[h,\pi]$ (в точке 0 имеем устранимый разрыв - см. "замечательные" пределы). Функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ интегрируема на промежутке $[h,\pi]$. Если мы дополнительно потребуем, чтобы эта функция была интегрируема и на промежутке $[0,h]$, то тогда оба слагаемых в формуле (5) будут стремиться к нулю при $n \to +\infty$ по лемме Римана. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема (Дини). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, либо терпит там разрыв 1 рода. Если существует $h \in (0,\pi)$ такое, что интеграл*

$$\int_0^h \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \qquad (6)$$

определен и принимает конечное значение, то ряд Фурье для функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к среднему значению S_0.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, либо терпит там разрыв 1 рода. Если существуют конечные односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, то ряд Фурье для функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к среднему значению S_0.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} + \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} = f'_+(x_0) + f'_-(x_0).$$

Раз этот предел существует и конечен, то функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ ограничена в окрестности точки 0, откуда следует, что интеграл (6) будет принимать конечное значение при некотором h. Следствие доказано.

Таким образом, для сходимости ряда Фурье в точке достаточно чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в этой точке, или хотя бы имела там конечные односторонние производные. Заметим, что просто непререрывности функции $f(x)$ в точке, вообще говоря, не достаточно для сходимости ряда Фурье. Требуется, чтобы в окрестности точки функция не совершала бесконечные колебания.

Пример. Разложим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2/4 - \pi x/2 & \text{при} \quad x \in [0,\pi], \\ x^2/4 + \pi x/2 & \text{при} \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

в ряд Фурье. Заметим, что $f(-x) = f(x)$, т.е. функция — четная. Значит (см. ранее), $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\cos kx\, dx = \begin{cases} -\pi^2/3 & \text{при} \quad k = 0, \\ 1/k^2 & \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Получаем

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kx}{k^2}. \tag{7}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $[-\pi,\pi]$, она дифференцируема при $x \neq 0$, в точке 0 она имеет конечные односторонние производные. Значит, формула (7) корректна при всех $x \in [-\pi,\pi]$. В частности, при $x = 0$ получим

$$f(0) = 0 = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ГЛАВА VIII ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§8. Сходимость в среднем рядов Фурье

Пусть задана счетная ортогональная система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \lambda_i^2, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ — некоторые положительные числа.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in L^2$. Разложим ее в ряд Фурье

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots .$$

Тогда, как было найдено ранее, коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$c_i = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx} = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 0, 1, \dots .$$

Построим функцию

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i\varphi_i(x),$$

где n — некоторое целое неотрицательное число, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ — некоторые вещественные коэффициенты. Поставим задачу: подобрать коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ таким образом, чтобы функция $f_n(x)$ наилучшим образом аппроксимировала функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. В качестве критерия оптимальности выберем минимизацию величины

$$\delta_n = \int_a^b \left(f(x) - f_n(x)\right)^2\,dx,$$

которая характеризует площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f(x)$ и $f_n(x)$.

Имеем

$$\delta_n = \int_a^b \left(f(x) - f_n(x)\right)^2\,dx = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i\varphi_i(x)\right)^2\,dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=0}^n \alpha_i \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx + \sum_{i,j=0}^n \alpha_i\alpha_j \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=0}^n \alpha_i c_i\lambda_i^2 + \sum_{i=0}^n \alpha_i^2\lambda_i^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx + \sum_{i=0}^n (\alpha_i - c_i)^2\lambda_i^2 - \sum_{i=0}^n c_i^2\lambda_i^2.$$

Очевидно, что минимум полученного выражения будет достигаться при $\alpha_i = c_i$, $i = 0, \dots, n$. Таким образом, наилучшая аппроксимация осуществляется, если в качестве $f_n(x)$ взять частичную сумму ряда Фурье. Далее полагаем, что $\alpha_i = c_i$, $i = 0, \ldots, n$, т.е.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x).$$

Тогда

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \lambda_i^2.$$

Поскольку $\delta_n \geq 0$, то

$$\sum_{i=0}^{n} c_i^2 \lambda_i^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i^2 \lambda_i^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Определение. *Ортогональная на отрезке $[a, b]$ система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ называется замкнутой в пространстве L^2, если для любой функции $f(x) \in L^2$ неравенство Бесселя выполнено как равенство (равенство Парсеваля):*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i^2 \lambda_i^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Выполнение равенства Парсеваля означает, что $\delta_n \to 0$ при $n \to +\infty$. В этом случае говорят, что ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[a, b]$.

В частности, рассмотрим классическую ортогональную систему

$$\begin{gathered}
\varphi_0(x) = 1, \\
\varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_2(x) = \cos x, \\
\varphi_3(x) = \sin 2x, \quad \varphi_4(x) = \cos 2x, \\
\ldots \\
\varphi_{2k-1}(x) = \sin kx, \quad \varphi_{2k}(x) = \cos kx, \\
\ldots
\end{gathered}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$. В этом случае ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где

$$\begin{aligned}
a_k &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \\
b_k &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Запишем неравенство Бесселя для классического ряда Фурье:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Теорема (Ляпунов). *Классическая (тригонометрическая) ортогональная система является замкнутой в пространстве L^2, т.е.*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

для любой функции $f(x)\in L^2$.

Теорема Ляпунова утверждает, что классический ряд Фурье для функций из пространства L^2 всегда сходится в среднем на заданном отрезке. Отметим, что из сходимости в среднем, вообще говоря, не следует поточечная сходимость ряда на этом отрезке.

§9. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Пусть заданы две функции $f_1(x), f_2(x)\in L^2$. Не умаляя общности, рассматриваем их на промежутке $[-\pi,\pi]$. Разложим их в ряд Фурье

$$f_i(x)=\frac{a_0^{(i)}}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^{(i)}\,\cos kx+b_k^{(i)}\,\sin kx\right),$$

где

$$\begin{array}{ll} a_k^{(i)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_i(x)\cos kx\,dx, \quad k=0,1,\ldots, & \\ & i=1,2. \\ b_k^{(i)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_i(x)\sin kx\,dx, \quad k=1,2,\ldots; & \end{array}$$

Учитывая правило сложения рядов, имеем

$$f_1(x)+f_2(x)=\frac{a_0^{(1)}+a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left((a_k^{(1)}+a_k^{(2)})\,\cos kx+(b_k^{(1)}+b_k^{(2)})\,\sin kx\right), \tag{1}$$

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{a_0^{(1)}-a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left((a_k^{(1)}-a_k^{(2)})\,\cos kx+(b_k^{(1)}-b_k^{(2)})\,\sin kx\right). \tag{2}$$

Запишем равенство Парсеваля для рядов (1) и (2). Получаем

$$\frac{(a_0^{(1)}+a_0^{(2)})^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left((a_k^{(1)}+a_k^{(2)})^2+(b_k^{(1)}+b_k^{(2)})^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)+f_2(x))^2\,dx, \tag{3}$$

$$\frac{(a_0^{(1)}-a_0^{(2)})^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left((a_k^{(1)}-a_k^{(2)})^2+(b_k^{(1)}-b_k^{(2)})^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-f_2(x))^2\,dx. \tag{4}$$

Вычитая (4) из (3), находим

$$\frac{a_0^{(1)}a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^{(1)}a_k^{(2)}+b_k^{(1)}b_k^{(2)}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)f_2(x)\,dx$$

— обобщенное равенство Парсеваля.

Подставляя в это равенство значение коэффициентов Фурье для функции $f_2(x)$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^{(1)}}{2} f_2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(a_k^{(1)}\,\cos kx + b_k^{(1)}\,\sin kx\right) f_2(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x) f_2(x)\,dx.$$

В результате доказали следующее: если ряд Фурье для некоторой функции $f_1(x)$ умножить на произвольную функцию $f_2(x)$, то полученный ряд можно почленно интегрировать на промежутке $[-\pi, \pi]$ (интеграл от суммы будет равен сумме интегралов). Заметим, что ранее именно такое допущение мы делали при выводе коэффициентов Фурье. Оказывается, что это допущение было оправдано. В частности, полагая $f_2(x) \equiv 1$, имеем, что любой классический ряд Фурье можно почленно интегрировать на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^{(1)}}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(a_k^{(1)}\,\cos kx + b_k^{(1)}\,\sin kx\right)\,dx.$$

Покажем далее, что почленное интегрирование допустимо и на любом другом промежутке.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx\right),$$

где

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Положим

$$F(x) = \int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\,dx.$$

Заметим, что

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \pi\,a_0 = 0,$$

т.е. $F(-\pi) = F(\pi)$.

Разложим функцию $F(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k\,\cos kx + B_k\,\sin kx\right).$$

Здесь

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = (\text{интегрируем по частям}) =$$

$$= \frac{1}{\pi k} F(x)\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = (\text{интегрируем по частям}) =$$

$$= -\frac{1}{\pi k} F(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_k}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Имеем

$$F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Значит,

$$A_0 = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Тогда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k \sin kx + b_k (1 - \cos kx)}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, dx.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^x f(x) \, dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, dx,$$

т.е. ряд Фурье допускает почленное интегрирование на промежутке $[0, x]$ при любом значении x. Поскольку при любых значениях a, b верно:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_0^b f(x) \, dx - \int_0^a f(x) \, dx,$$

несложно убедиться, что ряд Фурье допускает почленное интегрирование на любом промежутке $[a, b]$.

Аналогично можно доказать, что ряд Фурье можно почленно дифференцировать:

$$f'(x) = \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-a_k \, k \sin kx + b_k \, k \cos kx),$$

однако в этом случае надо убедиться, что ряд из производных сходится.

Общие теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов рассматривались ранее. В указанных теоремах использовалось понятие равномерной сходимости. Отметим, что для рядов Фурье достаточно проверить только простую сходимость (понятие равномерной сходимости в данном параграфе не использовалось).

§10. Аппроксимация непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами

Пусть задана функция $f(x)$. Снова, не умаляя общности, рассмативаем ее на промежутке $[-\pi, \pi]$. Разложим ее в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Частичную сумму ряда Фурье можно представить в виде интеграла Дирихле (см. ранее):

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) \, dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}.$$

Назовем это суммой Фейера. Тогда

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t) \, dt.$$

Здесь

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1}.$$

Лемма. *Функция $\Phi_n(t)$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \, dt = 1,$$

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2\pi \, (n+1) \, \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Доказательство. Докажем сначала первое соотношение. Заметим, что функция $\Phi_n(t)$ — четная. Тогда, учитывая лемму 4 из параграфа "Сходимость классического ряда Фурье", имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \, dt = 2 \int_{0}^{\pi} \Phi_n(t) \, dt = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{0}^{\pi} D_k(t) \, dt =$$

$$= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt = 1.$$

Докажем второе соотношение:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{2 \sin \frac{2k+1}{2} t \sin \frac{t}{2}}{4\pi \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{4\pi (n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t) =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)t}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\pi\,(n+1)\,\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что функции $D_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ имеют в точках $t=2\pi m$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, устранимые разрывы. Если их доопределить в этих точках следующим образом:

$$D_n(2\pi m) = \frac{2n+1}{2\pi}, \quad \Phi_n(t) = \frac{n+1}{2\pi}, \quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

то можно считать функции $D_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ непрерывными при всех $t\in(-\infty,+\infty)$.

Из второго соотношения леммы вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Функция $\Phi_n(t)$ — неотрицательная, 2π-периодическая, и для любого $\delta\in(0,\pi]$ справедливо условие:*

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)=0.$$

Теорема (Фейер). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, причем $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда последовательность сумм Фейера $\{\sigma_n(x)\}$ будет при $n\to+\infty$ сходиться к $f(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ 2π-периодическим образом на всю вещественную ось $(-\infty,+\infty)$. Поскольку $f(-\pi)=f(\pi)$, то полученная функция будет непрерывной на интервале $(-\infty,+\infty)$. Применяя теорему Кантора и учитывая периодичность функции, нетрудно заметить, что непрерывность будет равномерной на этом интервале, т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать $0<\delta\le\pi$ так, что если $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ и $|x_1-x_2|<\delta$, то $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Используя следствие к рассмотренной ранее лемме, найдем такое $N>0$, что при $n\ge N$ будет выполнено условие $0\le\Phi_n(t)<\varepsilon$ при $\delta\le|t|\le\pi$.

Кроме того, из непрерывности и периодичности функции $f(x)$ следует ее ограниченность, т.е. существует такое $M>0$, что $|f(x)|\le M$ при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Имеем

$$|\sigma_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)\,dt - f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt + \int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt + \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt.$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt \le 2M\varepsilon(\pi-\delta),$$

$$\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt \le 2M\varepsilon(\pi-\delta),$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x+t)-f(x)|\,dt < \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt \le \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \varepsilon,$$

то

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \varepsilon(4M(\pi-\delta)+1)$$

при всех $x\in(-\infty,+\infty)$. Теорема доказана.

Отметим, что из доказательства теоремы Фейера следует, что если $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, то последовательность сумм Фейера $\{\sigma_n(x)\}$ будет при $n \to +\infty$ сходиться к $f(x)$ равномерно на всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда ее можно сколь угодно точно аппроксимировать на интервале $(-\infty, +\infty)$ тригонометрическим полиномом, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такую функцию*

$$P_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — некоторые постоянные, что $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Для доказательства теоремы Вейерштрасса достаточно заметить, что частичные суммы ряда Фурье ($S_n(x)$), а значит и суммы Фейера ($\sigma_n(x)$) являются тригонометрическими полиномами. Тогда требуемое следует из теоремы Фейера.

В заключение, отметим, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция периода, отличного от 2π, то ее можно сделать 2π-периодической с помощью замены переменных.

ГЛАВА VIII ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ (продолжение)

§11. Обобщенное суммирование рядов

Пусть задан ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Построим последовательность его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Классическое определение сходимости ряда предполагает существование конечного предела $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Величина S в этом случае называется суммой ряда. Если указанного конечного предела не существует, то ряд называется расходящимся, и тогда использование такого ряда в практических вычислениях оказывается, вообще говоря, не корректным. Между тем, в некоторых ситуациях такие расходящиеся ряды могут возникать, и их использование может оказаться полезным. Тогда применяют методы так называемого обобщенного суммирования, позволяющие приписать расходящимся рядам некоторые значения сумм, согласно определенным правилам.

Рассмотрим некоторые примеры типовых ситуаций, приводящих при вычислениях к возникновению расходящихся рядов.

Пример. Пусть две конкретные величины представлены в виде сходящихся рядов

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \quad B = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

Предположим, что требуется перемножить эти величины. Однако, известно, что ряд, полученный в результате перемножения сходящихся рядов

$$C = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k,$$

может оказаться расходящимся (см. теорему Мертенса). Тогда возникает проблема: что понимать под значением такого произведения рядов? Как гарантировать, что $C = AB$?

Пример. Пусть задана некоторая функция, например, $f(x) = 1/(1+x)$. Разложим ее в ряд Тейлора:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

Радиус сходимости полученного степенного ряда равен 1, причем, на границе интервала сходимости ряд расходится. Но функция $f(x)$ определена в точке $x = 1$ и принимает там конкретное значение $f(1) = 1/2$. Можно ли это значение $1/2$ считать суммой расходящегося ряда: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?

Пример. Пусть некоторая функция представлена в виде ряда, например

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}.$$

Применяя признак Дирихле, можно доказать, что этот ряд сходится при $x \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Предположим, что функцию надо продифференцировать. Однако, применение почленного дифференцирования

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx$$

приводит к расходящемуся ряду при $x \neq \pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Можно ли этому расходящемуся ряду приписать значение суммы, равное значению производной $f'(x)$?

Определение. *Некоторое правило приписывания ряду обобщенной суммы будем называть допустимым, если выполняются следующие условия:*

1) Линейность: если ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ приписывается значение суммы A, а ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ приписывается значение суммы B, то тогда ряду $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(pa_k + qb_k)$ должно быть приписано значение суммы $pA + qB$ при любых значениях величин p и q;

2) Регулярность: если ряд сходится в классическом понимании сходимости, то он должен сходиться и в обобщенном смысле, и его обобщенная сумма должна совпадать с обычной.

Рассмотрим далее некоторые простейшие способы обобщенного суммирования.

1. Метод степенных рядов (по Пуассону). Пусть задан числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k. \tag{1}$$

Построим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k. \tag{2}$$

Определение. *Если ряд (2) сходится при $x \in (0, 1)$, и*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = A,$$

то число A называется обобщенной суммой ряда (1) в смысле Пуассона.

Можно доказать, что правило Пуассона обладает свойствами линейности и регулярности, т.е. оно допустимо.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

Он расходится в классическом смысле. Построим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \ldots.$$

Он сходится при $|x| < 1$, и его сумма равна

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1 + x}.$$

Поскольку
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \frac{1}{2},$$
то тогда можно считать, что
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}$$
в смысле Пуассона.

2. Метод средних арифметических (по Чезаро). Пусть задан ряд
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k. \tag{3}$$
Найдем его частичные суммы
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n = 0, 1, \ldots.$$
Построим последовательность средних арифметических:
$$\alpha_n = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Определение. *Если существует*
$$\lim_{n\to +\infty} \alpha_n = A,$$
то величина A называется обобщенной суммой ряда (3) в смысле Чезаро.

Можно доказать, что правило Чезаро обладает свойствами линейности и регулярности, т.е. оно допустимо.

Пример. Снова рассмотрим ряд
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - \ldots.$$
Имеем
$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \quad \alpha_{2k+1} = \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$
Очевидно, что
$$\lim_{n\to +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$
Значит, можно считать, что
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}$$
в смысле Чезаро.

Заметим, что для рассмотренного в примерах ряда обобщенная сумма по Пуассону и по Чезаро совпала. Можно доказать следуещее утверждение.

Теорема. *Если числовой ряд сходится по Чезаро к конечной сумме A, то он будет сходиться и по Пуассону к той же сумме.*

Обратная теорема, вообще говоря, не верна. Таким образом, суммирование по Пуассону обобщает понятие суммирования по Чезаро. Однако, часто по способу Чезаро действовать удобнее в техническом смысле. Кроме того, метод Чезаро можно применять не только для числовых, но и для функциональных рядов. Например, рассмотренные ранее суммы Фейера представляют собой обобщенное суммирование ряда Фурье по Чезаро.

Пример. Пусть задан расходящийся ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1) = 1 - 2 + 3 - \dots .$$

Просуммируем его по Пуассону:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)x^k = 1 - 2x + 3x^2 - \dots = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Полученный степенной ряд сходится при $|x| < 1$, и

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}.$$

Значит, ряд суммируем по Пуассону, и его обобщенная сумма равна $1/4$.

В то же время, нетрудно проверить, что по Чезаро этот ряд не суммируем (соответствующая последовательность средних арифметических $\{\alpha_n\}$ предела не имеет).

Теорема. *Пусть ряды*

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \quad B = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

сходятся в классическом смысле. Тогда ряд, полученный в результате перемножения этих рядов

$$C = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k,$$

будет сходиться в смысле Пуассона, причем его обобщенная сумма будет равна $C = AB$.

В заключение отметим, что существуют и другие способы обобщенного суммирования, которые могут применяться для решения различных задач.

§12. Бесконечные произведения

Наряду с бесконечными суммами при решении различных задач могут использоваться и бесконечные произведения.

Пусть задана последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда конструкция

$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 p_2 \dots \tag{1}$$

называется бесконечным произведением.

Величина
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 \dots p_n$$
называется частичным произведением.

Определение. *Если существует конечный предел*
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P,$$
причем $P \neq 0$, то произведение (1) называется сходящимся, а величина P называется в этом случае значением произведения.

Далее без потери общности будем считать, что $p_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Пример. Рассмотрим бесконечное произведение
$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$
Используя метод математической индукции, нетрудно доказать, что
$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad n = 2, 3, \dots.$$
Имеем
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$
Значит, рассматриваемое бесконечное произведение сходится к величине 1/2.

Обозначим
$$\pi_n = \prod_{k=n+1}^{+\infty} p_k = p_{n+1} p_{n+2} \dots, \tag{2}$$
и назовем это остаточным произведением.

Ясно, что
$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k = P_n \pi_n.$$

Справедливы следующие свойства:

1) Бесконечное произведение (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится бесконечное произведение (2) при любом $n = 0, 1, \dots$;

2) Если бесконечное произведение (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n = 1$;

3) Для сходимости бесконечного произведения (1) необходимо (но не достаточно), чтобы $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = 1$.

Учитывая свойство 3), далее без потери общности будем считать, что $p_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема. *Пусть $p_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Бесконечное произведение (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*
$$L = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln p_k, \tag{3}$$

причем, в этом случае $P = e^L$.

Доказательство. Положим

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k.$$

Тогда

$$P_n = e^{L_n}.$$

Переходя в данном соотношении к пределу при $n \to +\infty$, получим требуемое. Теорема доказана.

Согласно приведенной теореме, исследование сходимости бесконечного произведения сводится к исследованию сходимости ряда.

Теорема. *Пусть $p_k = 1 + a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, причем все a_k имеют один знак. Тогда Бесконечное произведение (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения (см. свойство 3)) эквивалентно тому, что $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. Тогда

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(1 + a_k)}{a_k} = 1.$$

Значит, ряды (3) и (4) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся по 2 признаку сравнения рядов. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть $p_k = 1 + a_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда если ряды*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$$

сходятся, то будет сходиться и бесконечное произведение (1).

Доказательство. Имеем

$$\ln(1 + a_k) = a_k - \frac{a_k^2}{2} + o(a_k^2).$$

Тогда

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} = \frac{1}{2}.$$

Значит, по 2 признаку сравнения рядов получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_k - \ln(1 + a_k))$ сходится. Но тогда ьудет сходиться и ряд (3). Теорема доказана.

Данная теорема, в отличие от предыдущей, дает только достаточные условия сходимости бесконечного произведения (1), но зато в ней не требуется, чтобы величины a_k имели один знак.

Определение. *Бесконечное произведение (1) называется абсолютно сходящимся, если ряд (3) сходится абсолютно.*

Теорема. *Если бесконечное произведение (1) сходится абсолютно, то для него верен переместительный закон умножения (коммутативность).*

Теорема. *Пусть $p_k = 1+a_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Бесконечное произведение (1) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд (4) сходится абсолютно.*

Таким образом, теория бесконечных произведений сводится к теории рядов.

§13. Кратные ряды

Пусть задан бесконечный набор чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i,k=1,2,\ldots}$. Расположим их в виде матрицы бесконечной размерности:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Просуммировав каждую строку этой матрицы, придем к рядам:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Просуммировав все выражения (1), придем к повторному ряду

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)}. \tag{2}$$

Аналогично, если сначала суммировать элементы по столбцам матрицы, а потом по строкам, то получим другой повторный ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{(k)}. \tag{3}$$

Определение. *Повторный ряд (2) называется сходящимся, если:*

1) все ряды (1) сходятся: $A^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) ряд $A = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}$ сходится.

Число A в этом случае называется суммой ряда (2).

Аналогично можно записать определение сходимости повторного ряда (3).

Пример. Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} p & -p^2 & p^2 & -p^3 & p^3 & \ldots \\ p(1-p) & -p^2(1-p^2) & p^2(1-p^2) & -p^3(1-p^3) & p^3(1-p^3) & \ldots \\ p(1-p)^2 & -p^2(1-p^2)^2 & p^2(1-p^2)^2 & -p^3(1-p^3)^2 & p^3(1-p^3)^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

где $p = \mathrm{const} \in (0, 1)$. В этом случае получаем

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

’ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = 1,$$

т.е. повторный ряд (2) сходится. С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = (-1)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

’ и значит, повторный ряд (3):

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i-1}$$

расходится.

Пусть $u_1, u_2, \dots$ — элементы матрицы $\mathbf{S}$, выписанные в некотором произвольном порядке. Рассмотрим ряд

$$\sum_{r=1}^{+\infty} u_r. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть ряд (4) сходится абсолютно, и* $U = \sum\limits_{r=1}^{+\infty} u_r$*. Тогда повторные ряды (2), (3) будут также сходиться к сумме* U*.*

Доказательство. Докажем теорему для ряда (2) (для (3) все аналогично). Пусть

$$U^* = \sum_{r=1}^{+\infty} |u_r|.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i^{(k)}| \le U^*, \quad \forall n, k = 1, 2, \dots.$$

Значит, ряды

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходятся. Отсюда следует сходимость (абсолютная) рядов (1).

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r_0 > 0 : \sum_{r=r_0+1}^{+\infty} |u_r| < \varepsilon, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\left| U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| = \left| \sum_{r=r_0+1}^{+\infty} u_r \right| \le \sum_{r=r_0+1}^{+\infty} |u_r| < \varepsilon. \tag{6}$$

Найдутся такие натуральные n_0, m_0, что все числа $u_1, \dots, u_{r_0}$ содержатся в первых n_0 строках и m_0 столбцах матрицы $\mathbf{S}$. Тогда из (5) получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0,\ m \ge m_0.$$

Переходя в данном неравенстве к пределу при $m \to +\infty$, установим, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r \right| \le \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0.$$

С учетом (6) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - U \right| < 2\varepsilon, \quad \forall n \ge n_0.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}$ сходится к сумме U. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть сходится повторный ряд, полученный из (2) путем замены всех $a_i^{(k)}$ на их абсолютные значения $|a_i^{(k)}|$, $i, k = 1, 2, \ldots$. Тогда повторный ряд (2) и ряд (4) будут также сходиться, причем к одной и той же сумме.*

Доказательство. Пусть

$$A^* = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i^{(k)}|.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_i^{(k)}| \le A^*, \quad \forall n, m > 0.$$

Рассмотрим

$$U_s^* = \sum_{r=1}^{s} |u_r|.$$

Можно указать такие натуральные m и n, что все числа $u_1, \ldots, u_s$ содержатся в первых n строках и m столбцах матрицы $\mathbf{S}$. Значит,

$$U_s^* \le A^*, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, ряд (4) абсолютно сходится. А тогда по предыдущей теореме и повторный ряд (2) будет также сходиться к той же сумме. Теорема доказана.

Аналогичную теорему можно сформулировать и для ряда (3).

Следствие. *Пусть сходится повторный ряд, полученный из (2) (или из (3)) путем замены всех $a_i^{(k)}$ на их абсолютные значения $|a_i^{(k)}|$, $i, k = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_i^{(k)}.$$

Введем теперь понятие двойного ряда

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_i^{(k)}. \tag{7}$$

Обозначим

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)}$$

и назовем это частичной суммой двойного ряда (7).

Определение. *Если существует конечный предел*

$$A = \lim_{m\to+\infty,\ n\to+\infty} A_m^{(n)},$$

то двойной ряд (7) называется сходящимся, а число A называется в этом случае суммой этого двойного ряда. Здесь при вычислении предела предполагается одновременные и независимые друг от друга стремления $m \to +\infty$ и $n \to +\infty$.

Пример. Пусть имеются два сходящихся одинарных ряда

$$A = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i, \qquad B = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i.$$

Положим

$$c_i^{(k)} = a_i b_k, \qquad i, k = 1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} c_i^{(k)}.$$

Пусть

$$A_m = \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Тогда

$$C_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i^{(k)} = A_m B_n.$$

Получаем

$$\lim_{m\to+\infty,\ n\to+\infty} C_m^{(n)} = \lim_{m\to+\infty,\ n\to+\infty} A_m B_n = AB.$$

Значит, построенный двойной ряд сходится к сумме AB.

Теорема (необходимое условие сходимости двойного ряда). *Для того чтобы двойной ряд (7) сходился, необходимо чтобы выполнялось условие:*

$$\lim_{i\to+\infty,\ k\to+\infty} a_i^{(k)} = 0.$$

Исследуем далее связь между двойными и повторными рядами.

Теорема. *Пусть сходится двойной ряд (7) и сходятся все одинарные ряды (1). Тогда будет сходиться и повторный ряд (2), причем*

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)}.$$

Доказательство. Как и ранее, положим

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Имеем

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} \right).$$

Отсюда

$$\lim_{m\to+\infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}.$$

Если

$$A = \lim_{m\to+\infty,\ n\to+\infty} A_m^{(n)},$$

то

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} A_m^{(n)} = A,$$

а следовательно, и

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} A^{(k)} = A.$$

Получили требуемое. Теорема доказана.

Аналогичную теорему можно сформулировать и для повторного ряда (3).

Определение. *Двойной ряд (7) называется абсолютно сходящимся, если сходится двойной ряд*

$$\sum_{i,k=1}^{+\infty} |a_i^{(k)}|.$$

Теорема. *Если двойной ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Теорема. *Если хотя бы один из рядов (2), (3), (4), (7) сходится абсолютно, то и три других будут также сходиться абсолютно, причем все эти ряды будут сходиться к одной и той же сумме.*

Аналогично можно рассмотреть функциональные двойные и повторные ряды. В частности, двойной ряд вида

$$f(x,y) = \sum_{i,k=0}^{+\infty} a_{ik}x^i y^k \tag{8}$$

называется двойным степенным рядом. Здесь $a_{ik} = \mathrm{const}$, $i,k = 0,1,\ldots$.

Теорема. *Пусть двойной ряд (8) сходится в точке $\bar{M} = (\bar{x},\bar{y})$, где $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$. Тогда ряд будет сходиться и в любой точке $M = (x,y)$, такой что $|x| < |\bar{x}|$, $|y| < |\bar{y}|$ (см. рисунок 1 а).*

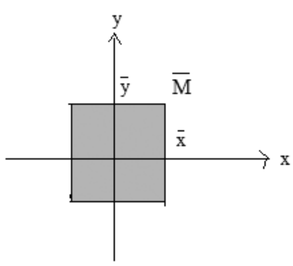

Рис. 1 а.

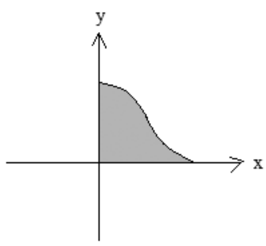

Рис. 1 б.

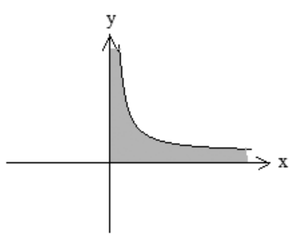

Рис. 1 в.

В теореме предполагается, что $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$. Если $\bar{x} = 0$ или $\bar{y} = 0$, то задача сведется к исследованию одинарного степенного ряда.

Пусть (r,θ) — полярные координаты. Рассмотрим произвольный луч $\theta = \mathrm{const} \in (0, \frac{\pi}{2})$, выходящий из начала координат. Из последней теоремы следует, что найдется такое $0 \le R(\theta) \le +\infty$, что во всех точках луча, где $r < R(\theta)$, ряд (8) сходится (причем абсолютно), а в точках, где $r > R(\theta)$, ряд (8) расходится. В точке $r = R(\theta)$ ряд (8) может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться. Если хотя бы при одном значении θ получим $R(\theta) = +\infty$, то тогда ряд (8) будет сходиться при любых $x, y \in (-\infty, +\infty)$. Если хотя бы при одном значении θ получим $R(\theta) = 0$, то тогда ряд (8) будет сходиться только при $x = y = 0$. В остальных случаях получим некоторую непрерывную кривую, ограничивающую область сходимости ряда (8). Эта область может быть как ограниченной, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{\theta\to+0} R(\theta)$ и $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} R(\theta)$, так и неограниченной, в противном случае (см. рисунки 1 б и 1 в). Аналогично можно рассмотреть случаи, когда $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ и $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. С учетом сформулированной теоремы, область сходимости двойного ряда (8) будет симметричной относительно осей координат.

Пример. Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots \\ y & xy & x^2y & x^3y & \dots \\ y^2 & xy^2 & x^2y^2 & x^3y^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует двойной ряд

$$\sum_{i,k=0}^{+\infty} x^i y^k.$$

По теореме об умножении рядов имеем:

$$\sum_{i,k=0}^{+\infty} x^i y^k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\right).$$

Оба ряда $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y^k$ сходятся абсолютно при $|x| < 1$, $|y| < 1$ к функциям $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{1}{1-y}$, соответственно. Значит, по теореме Мертенса рассматриваемый двойной ряд также будет сходиться (абсолютно) в прямоугольнике $|x| < 1$, $|y| < 1$ к функции $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$. Также абсолютная сходимость двойного ряда будет иметь место на осях координат $x = 0$ и $y = 0$ (в этом случае ряд станет одинарным). На границе указанного прямоугольника (в точках $|x| = 1$ и $y \neq 0$, а также в точках $|y| = 1$ и $x \neq 0$) двойной ряд будет расходиться.

Аналогичным образом можно ввести понятие n-кратного ряда. Например, ряд вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{+\infty} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

называется n-кратным степенным рядом. Здесь $a_{i_i\dots i_n} = \mathrm{const}$, $i_1, \dots, i_n = 0, 1, \dots$.

ГЛАВА 9. Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса

§ 1. Функции ограниченной вариации

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Построим сумму

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \qquad (1)$$

Определение. *Величина*

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup v$$

называется полным изменением (вариацией) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если эта величина конечна, то тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию (конечное изменение) на отрезке $[a, b]$. Супремум в данном определении берется по всевозможным дробления отрезка $[a, b]$.

Вариацию функции можно рассмотреть и на бесконечном интервале. В частности, под вариацией функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ будем понимать

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{b \geq a} \bigvee_a^b f(x).$$

Аналогичным способом можно ввести понятие вариации функции и на интервалах $(-\infty, b]$ и $(-\infty, +\infty)$.

Далее, если не оговорено противное, под отрезком $[a, b]$ будем понимать конечный отрезок.

1. Классы функций, имеющих ограниченную вариацию

Теорема. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$

$$= \sup(f(b) - f(a)) = f(b) - f(a) < +\infty.$$

Если функция $f(x)$ монотонно убывает на отрезке $[a, b]$, то аналогично получим

$$\bigvee_a^b f(x) = f(a) - f(b) < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.*

Доказательство. Кусочная монотонность функции означает, что отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$$

так, что функция будет монотонной на каждом из этих отрезков (здесь m — некоторое фиксированное натуральное число).

Поскольку добавление новых точек дробления может только увеличить сумму (1), то без потери общности будем считать, что точки $y_1, \ldots, y_{m-1}$ включены в число точек дробления отрезка $[a, b]$. Тогда, учитывая доказательство предыдущей теоремы, имеем

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{j=0}^{m-1} |f(y_{j+1}) - f(y_j)| < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.*

Доказательство. Условие Липшица означает, что существует такая константа $L \geq 0$, что для любых $x^{(1)}, x^{(2)} \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| \leq L|x^{(1)} - x^{(2)}|.$$

Тогда

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sup L \sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| =$$

$$= \sup L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b - a) < +\infty.$$

Теорема доказана.

Напомним, что для того чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию Липшица на отрезке $[a, b]$ достаточно, чтобы она имела на этом отрезке ограниченную производную.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ представима на отрезке $[a, b]$ в виде:*

$$f(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\, dt,$$

где $C = \mathrm{const}$, а функция $\varphi(t)$ — абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Абсолютная интегрируемость функции $\varphi(t)$ на отрезке $[a, b]$ означает, что интеграл $\int\limits_a^b |\varphi(t)|\, dt$ определен и принимает конечное значение. Тогда

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \sup \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|\, dt = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt < +\infty.$$

Теорема доказана.

Отметим, что если функция $\varphi(t)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, но не абсолютно ($\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt \neq \infty$, $\int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt = +\infty$), то тогда функция $f(x)$ будет иметь неограниченную вариацию на данном отрезке.

Рассмотрим далее пример функции с неограниченной вариацией на отрезке.

Пример. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x\,\cos\frac{\pi}{2x}, & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Выберем некоторое натуральное n и рассмотрим следующее дробление отрезка:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Можно проверить, что в этом случае

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Заметим, что это частичная сумма гармонического ряда, и $v \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Значит,

$$\bigvee_0^1 f(x) = \sup v = +\infty.$$

Рассмотренная в примере функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$, однако, в окрестности точки 0 она совершает бесконечные колебания. В то же время, отметим, что наличие бесконечных колебаний еще не означает, что вариация функции должна быть обязательно бесконечной.

Пример. Рассмотрим теперь на отрезке $[0, 1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\cos\frac{\pi}{2x}, & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Ее поведение имеет тот же характер, что и для функции из предыдущего примера. Однако, теперь функция имеет ограниченную (хотя и разрывную в точке 0) производную на всем отрезке

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,\cos\frac{\pi}{2x} + \pi\sin\frac{\pi}{2x}, & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, 1]$, а значит, согласно одной из предыдущих теорем, ее вариация на этом отрезке конечна.

2. Свойства функций, имеющих ограниченную вариацию

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на две части: $a < x < b$. Тогда

$$v = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \sup v = \bigvee_a^b f(x).$$

Отсюда
$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a)| \le$$
$$\le |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| \le \bigvee_a^b f(x) + |f(a)| < +\infty.$$
Теорема доказана.

Теорема (арифметические свойства функций с ограниченной вариацией). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, то тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, а если $|g(x)| \ge m > 0$ ($m = \mathrm{const}$) при $x \in [a,b]$, то и функция $f(x)/g(x)$ имеют ограниченную вариацию на этом отрезке.*

Доказательство. 1) Докажем для суммы. Пусть $s(x) = f(x) + g(x)$. Имеем
$$|s(x_{i+1}) - s(x_i)| \le |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$
Значит,
$$\bigvee_a^b s(x) \le \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) < +\infty.$$

2) Для разности все аналогично.

3) Докажем для произведения. Пусть $p(x) = f(x)g(x)$. Положим
$$A = \sup_{[a,b]} |f(x)|, \quad B = \sup_{[a,b]} |g(x)|,$$
причем по предыдущей теореме имеем, что $A < +\infty$, $B < +\infty$. Тогда
$$|p(x_{i+1}) - p(x_i)| = |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| \le$$
$$\le |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_{i+1})| + |f(x_i)g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| \le$$
$$\le B|f(x_{i+1}) - f(x_i)| + A|g(x_{i+1}) - g(x_i)|, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$
Значит,
$$\bigvee_a^b p(x) \le B\bigvee_a^b f(x) + A\bigvee_a^b g(x) < +\infty.$$

4) Для отношения все аналогично.

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, то тогда она будет иметь ограниченную вариацию и на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ для любого $c \in (a,b)$, причем*
$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные дробления отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$:
$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = b.$$
Пусть
$$v_1 = \sum_{i=0}^{m-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)|, \quad v_2 = \sum_{i=0}^{p-1} |f(z_{i+1}) - f(z_i)|.$$

Тогда, с учетом того, что дробления отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ в сумме образуют дробление отрезка $[a, b]$, имеем

$$v_1 + v_2 \le \bigvee_a^b f(x).$$

А поскольку это верно для любых дроблений, то значит, данное неравенство сохранится, если от левой части вычислить супремум, т.е. получаем

$$\sup v_1 + \sup v_2 = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \le \bigvee_a^b f(x).$$

Покажем теперь, что справедливо и обратное неравенство. Рассмотрим произвольное дробление отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Поскольку, как уже отмечалось ранее, добавление новой точки дробления может только увеличить сумму v, то без потери общности будем считать, что точка c включена в число точек дробления. Пусть $c = x_k$. Тогда

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = v_1 + v_2,$$

где

$$v_1 = \sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|, \quad v_2 = \sum_{i=k}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

В результате

$$v \le \sup v_1 + \sup v_2 = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Отсюда

$$\sup v = \bigvee_a^b f(x) \le \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Таким образом, окончательно приходим к равенству

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то тогда функция $g(x) = \bigvee_a^x f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[a, b]$.*

Доказательство. Для любых $a \le x_1 \le x_2 \le b$ имеем

$$g(x_2) - g(x_1) = \bigvee_a^{x_2} f(x) - \bigvee_a^{x_1} f(x) = \bigvee_a^{x_1} f(x) + \bigvee_{x_1}^{x_2} f(x) - \bigvee_a^{x_1} f(x) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f(x) \ge 0.$$

Отсюда следует требуемое.

Следствие. *Справедлива формула*

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{b\to+\infty} \bigvee_a^{b} f(x).$$

Теорема. *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы нашлась монотонно возрастающая, ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$ (называемая мажорантой для $f(x)$) такая, что для любых $x', x'' \in [a, b]$ ($x' < x''$) выполняется неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x').$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Положим $F(x) = \bigvee\limits_a^x f(x)$. Получим требуемое.

Достаточность. Пусть $F(x)$ — мажоранта функции $f(x)$. Тогда

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \sup \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a) < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись монотонно возрастающие, ограниченные на отрезке $[a, b]$ функции $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $f(x) = g(x) - h(x)$ (т.е. любую функцию с ограниченной вариацией можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих, ограниченных функций).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ — ее мажоранта. Тогда можно положить

$$g(x) = F(x), \quad h(x) = F(x) - f(x).$$

Отсюда нетрудно получить требуемое.

Достаточность. Пусть указанные функции $g(x)$ и $h(x)$ существуют. В силу их монотонности и ограниченности, они имеют ограниченную вариацию. Но тогда, согласно арифметическим свойствам, и их разность $f(x) = g(x) - h(x)$ также будет иметь ограниченную вариацию. Теорема доказана.

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то тогда и соответствующие функции $g(x)$ и $h(x)$ можно выбрать непрерывными.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\bigvee_a^b f(x) = \lim_{\lambda\to 0} v.$$

Здесь v — сумма, определяемая по формуле (1), а $\lambda = \max\limits_{i=0,\dots,n-1} (x_{i+1} - x_i)$ — ранг дробления отрезка $[a, b]$.

Понятие ограниченной вариации используется при решении различных задач. Рассмотрим далее некоторые простые примеры таких задач.

Пример. (Спрямляемость кривых.) Пусть непрерывная кривая K на плоскости задана в параметрическом виде

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Разобем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n произвольных частей

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Положим $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Точки $M_0, \ldots, M_n$ лежат на кривой K. Проведем через них ломаную T. Найдем периметр этой ломаной:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2}.$$

Величину $L = \sup p$ назовем длиной кривой K. Здесь супремум берется по всевозможным дроблениям отрезка $[\alpha, \beta]$. Если $p < +\infty$, то кривая K называется спрямляемой.

Теорема (Жордан). *Для того, чтобы кривая K была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имели ограниченную вариацию на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть кривая K спрямляема. Тогда для любого дробления отрезка $[\alpha, \beta]$ верно неравенство $p \le L < +\infty$. Отсюда имеем, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \le L, \quad \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| \le L.$$

Значит,

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \le L, \quad \bigvee_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \le L.$$

Достаточность. Пусть кривые $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$p \le \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| \le \bigvee_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} \psi(t) < +\infty.$$

Теорема доказана.

Аналогично можно рассмотреть понятие спрямляемой кривой в трехмерном пространстве. Также можно ввести понятие квадрируемой области (области, имеющей конечную площадь), кубируемого тела (тела, имеющего конечный объем), и т.д.

Пример. (Сходимость классического ряда Фурье.) Рассмотрим классический ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ранее была доказана теорема Дини, задающая достаточные условия сходимости данного ряда в некоторой точке. Можно доказать и следующее утверждение.

Теорема (Дирихле — Жордан). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, либо терпит там разрыв 1 рода. Если существует $h > 0$ такое, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, то ряд Фурье для функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к среднему значению $S_0 = (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))/2$.*

§ 2. Интеграл Стилтьеса

1. Определение интеграла Стилтьеса. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и ограничены на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Выберем произвольные $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $\lambda = \max\limits_{i=0,\ldots,n-1} \Delta x_i$ — ранг дробления. Построим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i)$$

и назовем ее суммой Стилтьеса.

Определение. *Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, и он не зависит от способа дробления отрезка $[a, b]$ и от выбора точек $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, то он называется интегралом Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$. Будем писать*

$$I = (S) \int_a^b f(x)\, dg(x). \tag{1}$$

Здесь буква (S) означает "Стилтьес".

Отметим, что если $g(x) = x$, то сумма Стилтьеса совпадет с суммой Римана, т.е.

$$(S) \int_a^b f(x)\, dx = (R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Здесь (R) означает "Риман". Таким образом, интеграл Стилтьеса является обобщением интеграла Римана.

Положим

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Суммы

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i)$$

назовем нижней и верхней суммами Дарбу — Стилтьеса. Нетрудно доказать, что если функция $g(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$ (в этом случае $\Delta g(x_i) \geq 0$, $i = 0, \ldots, n-1$), то тогда суммы Дарбу — Стилтьеса будут обладать такими же свойствами, что и суммы Дарбу — Римана:

1) Для любого дробления верно: $s \leq \sigma \leq S$.

2) При $\lambda \to 0$ нижняя сумма s увеличивается (не убывает), а верхняя S — уменьшается (не возрастает).

3) Любая нижняя сумма s не превосходит любой верхней суммы S на любых дроблениях.

Отсюда выткает справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда для существования интеграла Стилтьеса (1) необходимо и достаточно, чтобы имело место условие*

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0. \tag{2}$$

2. Классы функций, интегрируемых по Стилтьесу. Рассмотрим некоторые достаточные условия существования интеграла Стилтьеса.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию на этом отрезке, то тогда существует интеграл Стилтьеса (1).*

Доказательство. 1) Предположим сначала, что функция $g(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Из непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по теореме Кантора следует ее равномерная непрерывность на этом отрезке, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что если $0 < \lambda < \delta$, то $0 \leq M_i - m_i < \varepsilon$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда

$$0 \leq S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta g(x_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta g(x_i) = \varepsilon(g(b) - g(a)).$$

Значит, выполнено (2), откуда следует требуемое.

2) Пусть теперь $g(x)$ — произвольная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$. Тогда (см. предыдущий параграф) можно найти такие ограниченные и монотонно возрастающие на данном отрезке функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, что $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Заметим, что $\Delta g(x_i) = \Delta g_1(x_i) - \Delta g_2(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. В результате получим, что $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 — суммы Стилтьеса для интегралов

$$I_1 = (S)\int_a^b f(x)\,dg_1(x), \quad I_2 = (S)\int_a^b f(x)\,dg_2(x), \tag{3}$$

соответственно. По уже доказанному пункту 1) интегралы (3) существуют:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 = I_1, \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 = I_2.$$

Но тогда будет существовать и интеграл (1):

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0}(\sigma_1 - \sigma_2) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 - \lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 = I_1 - I_2.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица на этом отрезке, то тогда существует интеграл Стилтьеса (1).*

Доказательство. 1) Снова предположим сначала, что функция $g(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Пусть L — константа Липшица для этой функции. Тогда $\Delta g(x_i) \leq L\Delta x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Отсюда

$$0 \leq S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta g(x_i) \leq L\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0,$$

в силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ по Риману. Получили требуемое.

2) Пусть теперь $g(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[a,b]$. Положим $g_1(x) = Lx$, $g_2(x) = Lx - g(x)$. Нетрудно проверить, что функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ монотонно возрастают на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют там условию Липшица, причем $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ представима в виде*

$$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

где $C = \mathrm{const}$, а функция $\varphi(t)$ — абсолютно интегрируема на отрезке $[a,b]$, то тогда существует интеграл Стилтьеса (1).

Доказательство. Ограничимся доказательством теоремы лишь для случая, когда функция $\varphi(t)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е., когда интеграл $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$ — "собственный".

Положим $L = \sup\limits_{[a,b]} |\varphi(t)|$. Для любых $x^{(1)}, x^{(2)} \in [a,b]$ имеем

$$\left|g(x^{(2)}) - g(x^{(1)})\right| = \left|\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \varphi(t)\,dt\right| \le L\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right|.$$

Значит, функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a,b]$, а тогда интеграл (1) существует по предыдущей теореме.

3. Свойства интеграла Стилтьеса. Используя определение интеграла Стилтьеса, нетрудно доказать для него следующие свойства:

1) $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$,
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$,
3) $\int_a^b f(x)\,d(g_1(x) \pm g_2(x)) = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$,
4) $\int_a^b kf(x)\,d(lg(x)) = kl\int_a^b f(x)\,dg(x)$ $(k,l = \mathrm{const})$,
5) $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)$ $(c \in (a,b))$,
6) $\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$.

Здесь для краткости записи символ (S) перед интегралами убран. Отметим, что в свойствах 2)–4) из существования интегралов в правой части равенств следует существование интегралов в левой части. В свойстве 5), напротив, из существования интеграла в левой части равенства следует существование интеграла в правой части (обратное, в отличие от интеграла Римана, вообще говоря, не верно). В свойстве 6) существование интеграла в одной из частей равенства влечет за собой существование интеграла и в другой части.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [-1,0], \\ 1 & \text{при} \quad x \in (0,1], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [-1,0), \\ 1 & \text{при} \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

Тогда интегралы

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = 0,$$

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = 0$$

существуют (в первом случае $f(\xi_i) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$; во втором случае $\Delta g(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$).

В то же время интеграл

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dg(x)$$

не существует. В самом деле, рассмотрим дробление отрезка $[-1, 1]$:

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1,$$

причем, будем считать, что точка 0 не является точкой дробления. Тогда при любом ранге дробления можно указать такой индекс k, что $0 \in (x_k, x_{k+1})$. Отсюда имеем

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) + f(\xi_k)\Delta g(x_k) + \sum_{i=k+1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) =$$
$$= 0 + f(\xi_k)\Delta g(x_k) + 0 = f(\xi_k).$$

Если $\xi_k < 0$, то $\sigma = 0$, если $\xi_k > 0$, то $\sigma = 1$. Получаем, что предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ зависит от выбора точки ξ_k. Значит, рассматриваемый интеграл Стилтьеса не существует.

4. Правила вычисления интеграла Стилтьеса. Рассмотрим некоторые теоремы, позволяющие вычислять интеграл Стилтьеса.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ строго возрастает на этом отрезке. Тогда*

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_c^d f(g^{(-1)}(y))\,dy. \tag{4}$$

Здесь $c = g(a)$, $d = g(b)$, $g^{(-1)}(y)$ — функция, обратная к функции $g(x)$.

Данную теорему можно применять, и если функция $g(x)$ разрывна. В этом случае для вычисления интеграла Римана в правой части формулы (4) обратную функцию $g^{(-1)}(y)$ следует на промежутке $[c, d]$ доопределить до непрерывной. Однако, поскольку найти обратную функцию в явном виде далеко не всегда удается, для практических целей более удобна следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ представима в виде*

$$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

где $C = \mathrm{const}$, а функция $\varphi(t)$ — абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$, то тогда

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Следствие. *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ непрерывна везде на этом отрезке и имеет там производную (возможно за исключением конечного числа точек), причем функция $g'(x)$ абсолютно интегрируема на данном отрезке, то тогда*

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Доказательство следствия вытекает из предыдущей теоремы, если заметить, что

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,dt.$$

Таким образом, если функция $g(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то обозначение $dg(x)$ в интеграле Стилтьеса можно понимать как дифференциал данной функции: $dg(x) = g'(x)\,dx$. В результате, рассмотренную ранее для интеграла Римана операцию внесения переменной под знак дифференциала можно рассматривать как запись интеграла в форме Стилтьеса. Например, интеграл, стоящий в правой части соотношения

$$\int_0^2 x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(x^2)\,d(x^2)$$

по сути является интегралом Стилтьеса.

Отметим, однако, что интеграл Стилтьеса может быть определен и при недифференцируемой и даже разрывной функции $g(x)$. В этом случае он обобщает понятие интеграла Римана.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) функция $g(x)$ кусочно-непрерывна на этом отрезке, она терпит разрывы 1 рода в точках $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$, имеет производную на отрезке (за исключением конечного числа точек), причем функция $g'(x)$ абсолютно интегрируема на данном отрезке.
Тогда

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx+$$

$$+f(a)(g(a+0)-g(a)) + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)(g(c_k+0)-g(c_k-0)) + f(b)(g(b)-g(b-0)).$$

Пример. Пусть $f(x) = x$,

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{при} \quad x \in [-2,-1], \\ 2 & \text{при} \quad x \in (-1,0), \\ x^2+3 & \text{при} \quad x \in [0,2]. \end{cases}$$

Тогда

$$(S)\int_{-2}^2 f(x)\,dg(x) = (R)\int_{-2}^{-1} x\cdot 1\,dx + (R)\int_{-1}^0 x\cdot 0\,dx + (R)\int_0^2 x\cdot 2x\,dx+$$

$$+(-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = \frac{17}{6}.$$

Пример физического приложения интеграла Стилтьеса. Пусть стержень расположен вдоль оси Ox от точки a до точки b. Обозначим через $\rho(x)$ плотность стержня в точке x. Будем считать, что функция $\rho(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Кроме того, предположим, что к стержню в точках $a < c_1 < \ldots < c_k < b$ подвешены точечные грузы с массами $m_1, \ldots, m_k$, соответственно. Требуется найти статический момент этой системы тел относительно оси Oy.

Пусть $\Phi(x)$ — масса данной системы на промежутке $[a,x]$ ($x \in [a,b]$). Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[a,b]$, она кусочно-непрерывна на этом промежутке, в точках $c_1, \ldots, c_k$ она совершает скачки величины $m_1, \ldots, m_k$ (разрывы 1 рода), причем $\Phi'(x) = \rho(x)$ при $x \neq c_j$, $j = 1, \ldots, k$. Имеем $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = M$, где M — масса всей системы тел.

Рассмотрим дробление отрезка:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Снова обозначим через λ — ранг дробления. Если дробление достаточно мелкое, то каждый участок системы на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ можно приближенно считать материальной точкой. Значит, искомый статический момент будет приближенно равен

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta\Phi(x_i).$$

Здесь $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta\Phi(x_i) = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$. Получили сумму Стилтьеса. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, найдем точную формулу

$$I = (S) \int_a^b x \, d\Phi(x).$$

Применив последнюю теорему, это можно записать так:

$$I = (R) \int_a^b x\rho(x) \, dx + \sum_{j=1}^{k} c_j m_j,$$

откуда видно, что статический момент всей системы складывается из статического момента непрерывно распределенной массы и суммы статических моментов сосредоточенных масс.

ГЛАВА 10. Функции нескольких переменных

§ 1. Метрические пространства

В данном параграфе введем некоторые вспомогательные понятия функционального анализа, которые будут далее использоваться для построения теории функций нескольких переменных.

Пусть X — пространство элементов какой-либо природы.

Определение. *Пространство X называется метрическим, если любым двум элементам $x, y \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое метрикой, или расстоянием между x и y), удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) неотрицательность: $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;

3) неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$.

Пример. Пусть $X = R$ — множество вещественных чисел. Тогда можно положить $\rho(x, y) = |x - y|$. Все аксиомы в этом случае будут выполнены. Заметим, что весь математический анализ последовательностей и функций одной переменной строился на такой метрике. В частности, вспомним определение предела функции по Коши:

Число g является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ ($g = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta$ (расстояние между x и a меньше δ), то тогда $|f(x) - g| < \varepsilon$ (расстояние между $f(x)$ и g меньше ε).

Можно для рассматриваемого пространства ввести и другие метрики, например, можно считать, что $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, или $\rho(x, y) = |x - y|^3$, и т.д. Все аксиомы метрики также будут выполнены. Вопрос выбора конкретной формулы для метрики — это вопрос удобства решения тех или иных задач. Но, например, нельзя положить $\rho(x, y) = \sin |x - y|$ (тогда будут не выполнены аксиомы 1) и 3)).

Пример. Пусть теперь $X = C[a, b]$ — множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Для любых функций $f(x), g(x) \in X$ можно, например, положить

$$\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

или

$$\rho_2(f(x), g(x)) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx}.$$

В обоих случаях аксиомы метрики выполняются. В то же время, заметим, что введенные две метрики не эквивалентны в плане близости элементов: если функции $f(x)$ и $g(x)$ близки в смысле метрики ρ_1, т.е. $\rho_1(f(x), g(x))$ — мало, то они будут близки и в смысле метрики ρ_2, т.е. $\rho_2(f(x), g(x))$ — также будет мало, а обратное, вообще говоря, не верно. Таким образом, если мы докажем сходимость чего-то по метрике ρ_1, то тем самым мы получим и сходимость по метрике ρ_2, а в обратную сторону это не работает.

Вспомним ряды Фурье. Поточечная сходимость ряда на отрезке означает сходимость по ρ_1 (чтобы ее добиться формулировались теоремы Дини и Дирихле — Жордана). Сходимость в среднем ряда на отрезке означает сходимость по ρ_2 (она для классического ряда Фурье есть всегда - см. теорему Ляпунова). Таким образом, как это уже отмечалось ранее, требование сходимости в среднем слабее требования поточечной сходимости.

Далее, для удобства изложения, элементы пространства X будем называть точками (хотя к геометрическим точкам они могут не иметь никакого отношения).

Определение. *Множество*

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки x_0.

Данную окрестность еще называют шаром с центром в точке x_0 и радиусом ε (не надо путать данное понятие с геометрическим шаром). Например, если $X = R$, $\rho(x, y) = |x - y|$, то получим окрестность в виде интервала $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, которую мы использовали ранее в теории функций одной переменной.

Определение. *Точка $x_0 \in M \subset X$ называется внутренней точкой множества M, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(x_0) \subset M$ (точка x_0 входит в множество M вместе с некоторой своей окрестностью).*

Определение. *Множество $M \subset X$ называется открытым, если все его точки — внутренние.*

Определение. *Точка x_0 называется предельной точкой множества $M \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x \in M$, что $x \neq x_0$ и $x \in U_\varepsilon(x_0)$.*

Из данного определения следует, что если x_0 предельная точка множества M, то в любой ее окрестности будет содержаться бесконечное число элементов множества M. Сама точка x_0 может как принадлежать множеству M, так и не принадлежать.

Определение. *Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Определение. *Замыканием множества $M \subset X$ называется множество $\bar{M}$, полученное присоединением к M всех его предельных точек.*

Ясно, что $M \subset \bar{M}$, причем $\bar{M}$ — замкнутое. Если M — замкнутое, то $\bar{M} = M$.

Пример. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < 1$ будет открытым кругом. Точки на окружности $x^2 + y^2 = 1$, являются предельными для этого множества, но сами ему не принадлежат. Если мы их присоединим к множеству, то получим замкнутый круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Отметим, что множество может быть и не открытым, и не замкнутым. Так, если у рассмотренного круга часть граничной окружности принадлежит ему, а часть — нет, то получим такое множество.

Определение. *Точка $x_0 \in M \subset X$ называется изолированной точкой множества M, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $M \cap U_\varepsilon(x_0) = x_0$ (точка x_0 является единственной точкой множества M в какой-то своей окрестности $U_\varepsilon(x_0)$.*

Определение. *Точка x_0 называется граничной точкой множества $M \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0)$, что $x_1 \in M$ и $x_2 \notin M$.*

Сама граничная точка x_0 может как принадлежать множеству M, так и не принадлежать.

Подробнее теория метрических пространств будет рассмотрена в курсе "Основы функционального анализа".

§ 2. Пространство R^n

Пространством R^n будем называть совокупность упорядоченных наборов из n вещественных чисел или, что тоже самое, совокупность n-мерных векторов, т.е.

$$R^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad \text{где} \quad x_i \in R, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Число n в этом случае будет размерностью пространства.

Так $R^1 = R$ — одномерное множество вещественных чисел, пространство R^2 задает множество точек на плоскости, R^3 представляет собой наше трехмерное пространство, и т.д.

Введем метрику в пространстве R^n.

Для произвольных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ можно положить

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Такая метрика называется сферической (или евклидовой). Она равна геометрическому расстоянию между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Проверим аксиомы для этой метрики. Неотрицательность и симметричность, очевидно, имеют место. Докажем справедливость неравенства треугольника.

Для любых чисел $t, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2 \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$At^2 + 2Bt + C \geq 0, \tag{1}$$

где $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$, $C = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$. Поскольку неравенство (1) выполняется при всех t, то соответствующий дискриминант квадратичного выражения должен удовлетворять условию: $B^2 - AC \leq 0$. Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

В результате находим, что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{2}$$

Выберем произвольные $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$. Положим в (2):

$$a_i = x_i - z_i, \quad b_i = z_i - y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Приходим к неравенству треугольника. Следовательно все аксиомы для сферической метрики выполнены.

Заметим, что окрестность

$$U_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon\}$$

представляет собой геометрический шар (поэтому данная метрика и называется сферической).

Как отмечалось в предыдущем параграфе, метрику можно вводить по-разному, вопрос лишь в удобстве использования той или иной формулы при решении различных задач. Так, например, для пространства R^n можно положить

$$\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|,$$

все аксиомы метрики также будут выполнены.

Окрестность

$$U_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon\}$$

в этом случае представляет собой геометрический параллелепипед. Поэтому метрику ρ_2 принято называть параллелепипедальной.

Отметим, что при $n = 1$ эти две метрики совпадают ($\rho_1(x, y) = \rho_2(x, y) = |x - y|$).

Лемма. *Для любого* $\mathbf{x} \in R^n$ *верно:*

1) для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_1 > 0$*, что* $U_{\varepsilon_1}^{(2)}(\mathbf{x}) \subset U_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x})$*;*

2) для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_2 > 0$*, что* $U_{\varepsilon_2}^{(1)}(\mathbf{x}) \subset U_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x})$*.*

Лемма утверждает, что в любую сферическую окрестность элемента из R^n можно всегда поместить некоторую параллелепипедальную окрестность, и наоборот. Из этого следует, что метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны в плане близости элементов (т.е. все результаты, доказанные с использованием одной метрики, будут справедивы и для другой).

Есть и другие способы выбора метрики в пространстве R^n. Далее, если не оговорено противное, под метрикой $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будем понимать евклидову (сферическую) метрику.

§ 3. Последовательности в пространстве R^n

Пусть каждому натуральному k поставлен в соответствие вектор

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T.$$

Тогда говорят, что задана последовательность элементов в пространстве R^n: $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$.

Определение. *Точка* $\mathbf{a} \in R^n$ *называется пределом последовательности* $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ *при* $k \to +\infty$ *(пишут* $\mathbf{a} = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)}$*), если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать номер* $K > 0$*, такой что при всех* $k \geq K$ *выполнено условие* $\rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{a}) < \varepsilon$*.*

Теорема. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T$*. Тогда*

$$\mathbf{a} = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(k)} \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда

$$a_i = \lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказательство теоремы вытекает из леммы из прошлого параграфа (об эквивалентности в плане близости сферической и параллелепипедальной метрик). В самом деле, согласно этой лемме, имеем что требование

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - a_i)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

эквивалентно требованию

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i^{(k)} - a_i| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Таким образом, исследование сходимости последовательности в R^n (см. (1)) сводится к исследованию сходимости одномерных числовых последовательностей (см. (2)). Значит, вся теория, построенная ранее для одномерных числовых последовательностей, может быть распространена и на многомерный случай. Единственно, стоит заметить, что пространство R^n не упорядочено, т.е. между его элементами не установлены операции отношения "$<$","$>$","$\leq$","$\geq$". Поэтому теоремы из одномерного анализа, где используются эти операции, напрямую на многомерный случай не переносятся.

Отметим некоторые понятия и свойства.

Определение. *Последовательность* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *называется ограниченной, если существует* $M \geq 0$*, такое что* $\rho(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) \leq M$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots$. *Здесь* $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T$ *— нулевой элемент пространства* R^n.

Для пространства R^n верны утверждения:

1) Если предел последовательности существует, то он единственен.

2) Если последовательность сходится, то она ограничена.

3) Сходимость последовательности эквивалентна выполнению критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $K > 0$, что для любых натуральных $k \geq K$ и $p \geq 0$ имеет место условие $\rho(\mathbf{x}^{(k+p)}, \mathbf{x}^{(k)}) < \varepsilon$.

4) Справедливы арифметические свойства предела.

5) Если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

6) Справедлива теорема Больцано — Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

И т.д.

Докажем для примера теорему Больцано — Вейерштрасса для пространства R^n:

Пусть последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ ограничена. Тогда будет ограничена и одномерная последовательность $\{x_1^{(k)}\}$. Значит, по одномерной теореме Больцано — Вейерштрасса (см. ранее) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(m_k)}\}$. В результате получаем подпоследовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(m_k)}\}$, которая сходится по первой координате. Одномерная последовательность $\{x_2^{(m_k)}\}$ также ограничена. Выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{(p_{m_k})}\}$. Получаем подпоследовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(p_{m_k})}\}$, которая сходится по первым двум координатам.

Продолжая этот процесс, за n шагов получим подпоследовательность векторов, которая будет сходиться по всем координатам. Таким образом, удалось перенести теорему Больцано — Вейерштрасса с одномерного случая на многомерный.

В заключение отметим, что в пространстве R^n, в отличие от одномерного пространства R, напрямую не вводится понятие бесконечного предела.

§ 4. Функции нескольких переменных. Предел функции

Пусть задана область $D \subset R^n$. Пусть каждой точке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in D$ поставлено в соответствие однозначным образом вещественное число $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда говорят, что определена скалярная вещественная функция нескольких переменных. Область D назовем областью определения функции $f(\mathbf{x})$.

Функция одной переменной $y = f(x)$ задает кривую на плоскости. Функция двух переменных $y = f(x_1, x_2)$ задает двумерную поверхность в трехмерном пространстве, и т.д.

Пример. Рассмотрим функцию

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 x_2)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Областью определения этой функции является множество

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2 : \ x_1 x_2 > 0\}.$$

Задавая различные значения двумерной переменной $\mathbf{x} \in D$, будем получать различные значения функции. При этом точка $(x_1, x_2, y)^T$ будет пробегать по некоторой поверхности. Пусть, например, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. В этой точке функция принимает значение $y = f(1, 2) = (\ln 2)/5$.

Определение. *Величина*

$$\operatorname{diam} D = \sup_{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in D} \rho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

называется диаметром области D. Если $\operatorname{diam} D < +\infty$*, то область D называется ограниченной.*

Определение. *Область D называется связной, если любые две точки этой области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области.*

Например, область D из предыдущего примера не ограничена и не связна.

Определение (предел функции по Гейне). *Пусть $\mathbf{a}$ — предельная точка области $D \subset R^n$. Число g называется пределом функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{a}$:*

$$g = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

если для любой последовательности точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ из области D, таких что $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{a}$ при $k \to +\infty$, выполняется условие $f(\mathbf{x}^{(k)}) \to g$ при $k \to +\infty$.

Таким образом, как и в одномерном случае, определение предела функции сводится к понятию предела последовательности. Смысл определения предела: вдоль любого пути в области задания функции, ведущего к предельной точке, значение функции должно стремиться к одному и тому же числу. В одномерном случае мы могли приближаться к предельной точке на вещественной прямой слева и справа (вводились лево и правосторонние пределы). В многомерном случае (на плоскости, в трехмерном пространстве, и т.д.) мы можем приближаться к предельной точке как угодно (по прямой, по спирали, и т.д.).

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T$. В предыдущем параграфе отмечалось, что требование

$$\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{a} \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

эквивалентно требованию

$$x_i^{(k)} \to a_i \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Зафиксируем переменные $x_2, \ldots, x_n$, а переменную x_1 устремим к a_1. Рассмотрим одномерный предел

$$f^{(1)}(x_2, \ldots, x_n) = \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

После этого, оставляя фиксированными переменные $x_3, \ldots, x_n$, устремим переменную x_2 к a_2, и т.д. В результате придем к так называемому повторному пределу

$$\lim_{x_n \to a_n} \ldots \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Если фиксировать переменные в другом порядке, получим другой повторный предел. Всего, очевидно, можно построить $n!$ повторных пределов. Так, если $n = 2$, то будет два повторных предела

$$\lim_{x_1 \to a_1} \lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2), \qquad \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2).$$

Повторный предел состоит из нескольких одномерных пределов (каждый раз ищем предел только по одной из переменных). Нетрудно доказать, что если существует многомерный предел (1) и какой-то из повторных пределов, то они равны между собой (т.е. вычисление многомерного предела можно свести к вычислению нескольких одномерных пределов).

Пример. Имеем

$$\lim_{(x_1,x_2)^T \to (0,0)^T} (x_1^2 + x_2^2) = \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} (x_1^2 + x_2^2) = \lim_{x_1 \to 0} x_1^2 = 0.$$

Однако, существование многомерного предела не гарантирует существование повторного предела, и наоборот.

Пример. Пусть $\mathbf{a} = (0, 0)^T$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Оба повторных предела здесь существуют

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0. \tag{2}$$

В то же время, многомерного предела

$$\lim_{(x_1,x_2)^T \to (0,0)^T} f(x_1, x_2) \tag{3}$$

здесь не будет. В самом деле, будем двигаться вдоль лучей, ведущих в начало координат:

$$x_1 \to 0, \quad x_2 = kx_1 \to 0, \tag{4}$$

где коэффициент $k = \mathrm{const}$ задает наклон луча. На этих лучах имеем

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, kx_1) = \frac{k}{k^2+1}.$$

Этот предел существует, но зависит от выбора k, т.е. вдоль разных лучей, ведущих в предельную точку, значение функции стремится к разным значениям. Значит, предела (3) нет.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

В качестве предельной точки снова возьмем $\mathbf{a} = (0,0)^T$. Аналогично получим, что соотношения (2) верны. Двигаясь вдоль лучей (4), находим, что предел

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, kx_1) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{kx_1}{x_1^2 + k^2} = 0$$

не зависит от выбора k. Однако, это еще не означает, что предел (3) существует, поскольку в определении предела предполагается движение по любым путям, ведущим к предельной точке, не обязательно по лучам. Будем, например, двигаться по параболам:

$$x_1 \to 0, \quad x_2 = kx_1^2 \to 0.$$

Получим

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, kx_1^2) = \frac{k}{k^2+1}.$$

Снова имеем зависимость от выбора k, т.е. на каждой рассматриваемой параболе значение функции стремится к разным значениям. Значит, предела (3) по-прежнему нет.

Пример. Рассмотрим теперь обратную ситуацию. Пусть $\mathbf{a} = (0,0)^T$,

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_2 \sin \frac{1}{x_1}.$$

Учитывая предельное соотношение

$$0 \le |f(x_1, x_2)| \le |x_1| + |x_2| \to 0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2)^T \to (0,0)^T,$$

получаем, что многомерный предел существует:

$$\lim_{(x_1,x_2)^T \to (0,0)^T} f(x_1, x_2) = 0.$$

С другой стороны, ни одного из повторных пределов

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2), \quad \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)$$

здесь не будет.

Если, например, рассмотреть функцию

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1},$$

то получим, что повторный предел

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 0$$

здесь существует, а повторный предел

$$\lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)$$

нет.

Таким образом, сводить многомерный предел к повторному можно, только убедившись в том, что оба они существуют.

Определение предела функции по Гейне удобно использовать в случаях, когда надо доказать, что предела нет. Для этого достаточно найти два пути, ведущих в предельную точку, вдоль которых значение функции стремится к разным величинам, или один путь, вдоль которого значение функции вообще ни к чему не стремится. В тех случаях, когда предел существует, часто бывает удобнее использовать другое определение предела функции.

Определение (предел функции по Коши). *Пусть* $\mathbf{a}$ *— предельная точка области* $D \subset R^n$*. Число* g *называется пределом функции* $f(\mathbf{x})$ *в точке* $\mathbf{a}$*:*

$$g = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$*, такое что для всех* $\mathbf{x} \in D$*, удовлетворяющих условию* $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$*, будет иметь место неравенство* $|f(\mathbf{x}) - g| < \varepsilon$*.*

Будут верны те же теоремы, что и в одномерном случае.

Теорема. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Теорема (критерий сходимости Коши). *Для того, чтобы существовал конечный предел* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать* $\delta > 0$ *так, чтобы для всех* $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in D$*, удовлетворяющих условиям* $\rho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{a}) < \delta$*,* $\rho(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{a}) < \delta$*, имело место неравенство* $|f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(2)})| < \varepsilon$*.*

Теорема (арифметические свойства предела). *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = g, \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = r.$$

Тогда:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \pm h(\mathbf{x})) = g \pm r, \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})) = gr,$$

а если $r \neq 0$*, то*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} = \frac{g}{r}.$$

Определение. *Пусть функция* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в области* $D \subset R^n$*, а функции*

$$x_1 = h_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n = h_n(t_1, \ldots, t_m)$$

определены в области $G \subset R^m$*. Тогда функция*

$$y = f\left(\mathbf{h}(\mathbf{t})\right) = f\left(h_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, h_n(t_1, \ldots, t_m)\right)$$

называется суперпозицией скалярной функции $f(\mathbf{x})$ *и векторной функции* $\mathbf{h}(\mathbf{t})$*, или иначе, сложной функцией. Здесь*

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)^T, \quad \mathbf{h}(\mathbf{t}) = (h_1(\mathbf{t}), \ldots, h_n(\mathbf{t}))^T.$$

Пример. Из функций $y = x_1 x_3 + x_2^2$, $x_1 = \sqrt{t_1 + t_2}$, $x_2 = t_1 t_2$, $x_3 = \sin t_1$ можно построить суперпозицию $y = \sqrt{t_1 + t_2}\sin t_1 + t_1^2 t_2^2$.

Теорема (о суперпозиции пределов). *Пусть* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ *— предельная точка области* $G \in R^m$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ *— предельная точка области* $D \in R^n$. *Тогда если существуют пределы*

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{b}} \mathbf{h}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = g,$$

то

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{b}} f\left(\mathbf{h}(\mathbf{t})\right) = g.$$

ГЛАВА 10. Функции нескольких переменных (продолжение)

§ 5. Непрерывные функции

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена в области $D \subset R^n$.

Определение. *Функция $f(\mathbf{x})$ называется непрерывной в точке $\mathbf{a} \in D$, если*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Функция $f(\mathbf{x})$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема (арифметические свойства). *Если функции $f(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$ непрерывны в точке $\mathbf{a} \in D$, то тогда в этой точке будут непрерывны и функции $f(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})h(\mathbf{x})$, а если $h(\mathbf{a}) \neq 0$, то и функция $f(\mathbf{x})/h(\mathbf{x})$.*

Теорема (о непрерывности суперпозиции). *Пусть n-мерная векторная функции $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{t})$ непрерывна в точке $\mathbf{b} \in R^m$, а скалярная функция $y = f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{a} = \mathbf{h}(\mathbf{b}) \in R^n$. Тогда сложная функция $f\left(\mathbf{h}(\mathbf{t})\right)$ будет непрерывной в точке $\mathbf{b}$ (т.е. суперпозиция непрерывных функций также непрерывна).*

Доказательство этих двух теорем следует из арифметических свойств предела функции и из теоремы о суперпозиции пределов (см. предыдущий параграф).

Теорема (Коши — Больцано о нуле функции). *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в связной области $D \subset R^n$. Если для некоторых двух точек $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ выполняются условия $f(\mathbf{a}) < 0$, $f(\mathbf{b}) > 0$, то тогда найдется такая точка $\mathbf{c} \in D$, что $f(\mathbf{c}) = 0$.*

Доказательство. Поскольку область D — связная, то заданные точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно соединить непрерывной кривой L, целиком лежащей в этой области. Запишем уравнение этой кривой в параметрическом виде:

$$x_1 = h_1(t), \ldots, x_n = h_n(t).$$

Здесь t — скалярный параметр, пробегающий все вещественные значения из некоторого промежутка $[\alpha, \beta]$. Для краткости введем векторную функцию

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))^T.$$

Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{h}(\alpha)$, $\mathbf{b} = \mathbf{h}(\beta)$.

Рассмотрим сложную функцию

$$F(t) = f(\mathbf{h}(t)) = f(h_1(t), \ldots, h_n(t)),$$

описывающую поведение функции $f(\mathbf{x})$ при аргументе $\mathbf{x}$, пробегающем по кривой L в пространстве R^n.

Имеем: $F(\alpha) = f(\mathbf{a}) < 0$, $F(\beta) = f(\mathbf{b}) > 0$. Функция $F(t)$ — это функция одной переменной t. Используя одномерную теорему Коши — Больцано о нуле функции, получаем, что найдется такое значение параметра $\gamma \in (\alpha, \beta)$, что $F(\gamma) = 0$. Полагая $\mathbf{c} = \mathbf{h}(\gamma)$, приходим к требуемому $f(\mathbf{c}) = 0$. Теорема доказана.

Теорема (Коши — Больцано о промежуточных значениях функции). *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в связной области $D \subset R^n$. Если для некоторых двух точек $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ выполняются условия $f(\mathbf{a}) = A$, $f(\mathbf{b}) = B$, причем $A < B$, то тогда для любого $A < C < B$ найдется такая точка $\mathbf{c} \in D$, что $f(\mathbf{c}) = C$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - C$. В силу арифметических свойств, она будет также непрерывной в области D. Имеем $\Phi(\mathbf{a}) = A - C < 0$, $\Phi(\mathbf{b}) = B - C > 0$. Тогда по доказанной ранее теореме Коши — Больцано о нуле функции получаем, что найдется такая точка $\mathbf{c} \in D$, что $\Phi(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c}) - C = 0$. Теорема доказана.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области $D \subset R^n$. Тогда она ограничена в этой области и достигает там своих максимума и минимума.*

Доказательство. 1) Покажем сначала, что функция $f(\mathbf{x})$ ограничена в области D. Пусть это не так. Тогда для любого натурального k найдется $\mathbf{x}^{(k)} \in D$, такое что $|f(\mathbf{x}^{(k)})| > k$.

Область D — ограничена. Значит, и последовательность точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ из этой области будет ограничена. По теореме Больцано — Вейерштрасса выбираем сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{(m_k)}\}$. Пусть $\bar{\mathbf{x}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(m_k)}$. Область D — замкнута. Значит, $\bar{\mathbf{x}} \in D$. Поскольку $|f(\mathbf{x}^{(k)})| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, то и $|f(\mathbf{x}^{(m_k)})| \to +\infty$ при $k \to +\infty$. С другой стороны, в силу непрерывности, должно выполняться условие $|f(\mathbf{x}^{(m_k)})| \to |f(\bar{\mathbf{x}})|$ при $k \to +\infty$. Полученное противоречие показывает, что функция $f(\mathbf{x})$ не может быть неограниченной в области D.

2) Покажем теперь, что у функции $f(\mathbf{x})$ существует максимальное значение в области D (для минимума все аналогично). Положим $M = \sup\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$. По уже доказанной первой части теоремы $M \neq \infty$. Предположим, что максимум функции не существует. Тогда $f(\mathbf{x}) < M$ в области D. Следовательно, функция $h(\mathbf{x}) = 1/(M - f(\mathbf{x}))$ будет непрерывной в D. По пункту 1) доказательства теоремы имеем, что функция $h(\mathbf{x})$ ограничена в D, откуда получаем, что найдется такое $L > 0$, что $h(\mathbf{x}) < L$ при всех $\mathbf{x} \in D$. Тогда $f(\mathbf{x}) < M - 1/L$ при всех $\mathbf{x} \in D$, а это противоречит выбору величины M (определению точной верхней грани). Теорема доказана.

Определение. *Функция $f(\mathbf{x})$ называется равномерно непрерывной в области $D \subset R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, что для всех точек $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)} \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(2)})| < \varepsilon$.*

Подчеркнем, что в определении равномерной непрерывности функции величина δ зависит только от выбора ε и не зависит от выбора точек $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$. В этом отличие свойства равномерной непрерывности от свойства просто непрерывности.

Теорема (Кантор). *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области $D \subset R^n$. Тогда она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ не является равномерно непрерывной в области D. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно выбрать точки $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)} \in D$ так, что будут выполнены условия $\rho(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) < \delta$, $|f(\mathbf{x}^{(1)}) - f(\mathbf{x}^{(2)})| \geq \varepsilon$.

Для каждого натурального k положим $\delta_k = 1/k$ и найдем $\mathbf{x}^{(1k)}$, $\mathbf{x}^{(2k)} \in D$ такие, что $\rho(\mathbf{x}^{(1k)}, \mathbf{x}^{(2k)}) < \delta_k$, $|f(\mathbf{x}^{(1k)}) - f(\mathbf{x}^{(2k)})| \geq \varepsilon$.

Область D — ограничена. Значит, и последовательность точек $\{\mathbf{x}^{(1k)}\}$ из этой области будет ограничена. По теореме Больцано — Вейерштрасса выбираем сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{(1m_k)}\}$. Пусть $\bar{\mathbf{x}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(1m_k)}$. Область D — замкнута. Значит, $\bar{\mathbf{x}} \in D$.

Из аксиом метрики следует:

$$0 \leq \rho(\mathbf{x}^{(2m_k)}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \rho(\mathbf{x}^{(2m_k)}, \mathbf{x}^{(1m_k)}) + \rho(\mathbf{x}^{(1m_k)}, \bar{\mathbf{x}}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}^{(2m_k)} = \bar{\mathbf{x}}$.

Функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в области D, а значит, и в точке $\bar{\mathbf{x}}$, т.е.

$$\lim_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}^{(1m_k)}) = f(\bar{\mathbf{x}}), \quad \lim_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}^{(2m_k)}) = f(\bar{\mathbf{x}}),$$

откуда имеем, что

$$|f(\mathbf{x}^{(1m_k)}) - f(\mathbf{x}^{(2m_k)})| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

А это противоречит условию, что $|f(\mathbf{x}^{(1m_k)}) - f(\mathbf{x}^{(2m_k)})| \geq \varepsilon$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.